GE110 Tutorato 12

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo tale che

   $f(a, b, c, d) = (2a, 2b, 2a + b + c, b - a)$.

   - Si determini una base di $Im(f), Ker(f)$.
   - se consideri il sottopazio vettoriale
     $X = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ t.c. \ x - y + 2t = 0\}$
     di $\mathbb{R}^4$, si dimostri che $Im(f) \subseteq X$ e si deduca che la restrizione g di f a X è un endomorfismo di X. Si stabilisca se g è un automorfismo di X.
   - Si determinino autovalori e autospazi di g, si dica se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si esibisca una base di X costituita da autovettori di g.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia $\prod$ il piano di equazione $X + Y - 3Z = 0$ e siano R ed R_1 le rette di equazioni parametriche

   $$R : \begin{cases} X = 3t - 1 \\ Y = 2t \\ Z = t - 2 \end{cases} \qquad R_1 : \begin{cases} X = 0 \\ Y = 3u \\ Z = u \end{cases} , \ t, u \in \mathbb{R}.$$

   - Si determinino (se esistono)le equazioni di tutti i piani affini P tali che $R \subset P$ e $P \cap R_1 = \emptyset$;
   - Si determinino (se esistono)le equazioni di tutte le rette affini S tali che $S \subset \prod$ e $S \cap R = \emptyset$;
   - Si determinino (se esistono)le equazioni di tutte le rette affini T tali che $T \subset \prod$ e T è complanare ad R.

3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, $F : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare, $A \in M_n$ una matrice. Poniamo $r = rg(A)$ e $p = dim(Im(F))$.
   - Si dimostri che se $r \neq p$, allora non esiste una base $e = \{e_1, ..., e_n\}$ tale che A è la matrice di F nella base e;
   - Si dimostri che, per ogni F fissata, esistono delle matrici $A \in M_n$ tali che $r = p$ ma non esiste una base $e = \{e_1, ..., e_n\}$ in cui A è la matrice di F.

4. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice: $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & t \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;
   (b) trovare basi per gli autospazi di A;
   (c) determinare i valori di t per i quali la matrice A è diagonalizzabile.

5. Sia a un numero reale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e siano $v = e_2 - e_3$, $w = (a-5)e_1 + \frac{7}{4}e_2 + 4e_3$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $F(e_1 + v) = w$, $F(e_1) = ae_1 + 2e_3$, $F(e_2 + e_3) = e_1 + \frac{1}{4}e_2$.
   (a) Determinare la matrice A associata ad F;
   (b) trovare $\forall a \in \mathbb{R}$ basi per gli autospazi di F;
   (c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.

6. In uno spazio affine di dimensione 3 consideriamo un riferimento affine $O\{e_1, e_2, e_3\}$ e le tre rette di equazioni parametriche:
$$R_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad R_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3s \end{cases}, \quad R_3 : \begin{cases} x = 2 \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}.$$
   (a) Esiste un piano che contiene tutte e tre le rette?
   (b) Determinare tutte le terne di punti $P_1 \in R_1$, $P_2 \in R_2$, $P_3 \in R_3$ tali che P_1, P_2 e P_3 sono allineati.