GE110 Tutorato 3

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$:

   - $S_1 := \{v_1 = (1,3,2),\ v_2 = (2,1,-1),\ v_3 = (1,2,-2)\}$
   - $S_2 := \{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (2,0,6),\ v_3 = (2,3,0)\}$
   - $S_3 := \{v_1 = (4,2,1),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (4,0,5),\ v_4 = (1,1,0)\}$
   - $S_4 := \{v_1 = (3,-5,2),\ v_2 = (1,3,-1)\}$

   Per ciascuno di tali sottoinsiemi, si dica se è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, se è linearmente indipendente e se è una base di $\mathbb{R}^3$.

   Per quei sottoisiemi che siano linearmente dipendenti, si esibisca una combinazione lineare dei loro elementi che sia nulla e non banale.

   Per ogni $i = 1,2,3,4$, si dica se $(1,1,1)$ è combinazione lineare dei vettori di S_i e, quando possibile, si determini una tale combinazione lineare.

2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici:
   $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Si verifichi che l'insieme $\mathcal{K} := \{A, B, C, D\}$ è una base di $M_2(\mathbb{R})$ e si esprima la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{K}$.

3. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si dica se è un sottospazio vettoriale:
   a) $\mathcal{W}_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c = 0\}$.
   b) $\mathcal{W}_2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c \leq 1\}$.
   c) $\mathcal{W}_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a^2+b^2+c^2 = 0\}$.
   d) $\mathcal{W}_4 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 2b+c = 1\}$.

4. Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, munito della sua naturale struttura di $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale (cf. Esercizio 9 della prima collezione di esercizi per casa (di riscaldamento)). Si verifichi che il sottoinsieme

$\mathbb{Q}(i) := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$ è un $\mathbb{Q}-$sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$, e se ne determini una base.

5. Siano n un intero positivo e T un'indeterminata su $\mathbb{R}$. Come usuale, sia $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di ordine n a entrate reali e $\mathbb{R}[T]_{\leq n}$ l'insieme dei polinomi nell'indeterminata T a coefficienti reali di grado al più n. Si determini una base e la dimensione dei seguenti spazi vettoriali:

   - $M_n(\mathbb{R})$
   - $\{A := (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) : a_{ij} = 0 \ , \forall i \neq j\}$
   - $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
   - $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$
   - $\{f(T) \in \mathbb{R}[T]_{\leq 2} : \ f(1) = f(2) = 0\}$

6. Si risolva, se è compatibile, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

7. Si determinino le coordinate dei vettori di
   $v_1 = (3, 2, -5), \ v_2 = (1, 0, -\frac{1}{2}), \ v_3 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$
   rispetto alle seguenti basi:

   - La base canonica di $\mathbb{R}^3$;
   - $\{(1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$