

GE110 Tutorato 4

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si calcoli il rango delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

AB, BC, CD, DA .

2. Si trovino le dimensioni di $U, W, U + W, U \cap W$ e una base per ognuno di essi:

- $U = \langle (1, 1, -1, 0), (-1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, 1) \rangle$
 $W = \langle (1, 0, -1, 0), (-1, -1, 0, 0) \rangle$

- $U = \langle (1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (-1, -\frac{1}{2}, 0) \rangle$
 $W = \langle (1, 0, -1), (-1, 0, 1), (-2, 0, 1) \rangle$

- $U = \langle (1, -1, 1), (1, -1, 0) \rangle$
 $W = \langle (1, 0, 0), (1, 1, 0) \rangle$

- $U = \langle (1, 0, 0), (-1, 0, 0) \rangle$
 $W = \langle (-1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 1) \rangle$

- $U = \langle (0, 1, 1), (0, -1, -1) \rangle$
 $W = \langle (1, 0, 1), (1, 0, 0), (-1, 0, 1) \rangle$

- $U = \langle (1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0) \rangle$
 $W = \langle (0, -1, 0, -1), (0, 0, 0, -1), (0, -2, 0, -1) \rangle$

3. Si determini una base dei seguenti sottospazi e la si completi ad una base di \mathbb{R}^n :

- $n = 3$; $\langle (3, 2, 1), (1, 4, 2), (1, 6, 3) \rangle$
- $n = 3$; $\langle (2, 1, 1), (1, 3, 2), (2, -4, -2) \rangle$
- $n = 4$; $\langle (0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 0), (2, 6, 8, 4), (2, 5, 7, 2) \rangle$
- $n = 4$; $\langle (1, 3, 2, 1), (1, -1, 0, 1), (2, 1, -2, 1), (2, -2, 0, 2) \rangle$
- $n = 4$; $\langle (1, 0, 1, 2), (3, 0, 1, 2), (2, 0, 0, 1), (2, 0, 2, 3) \rangle$

4. Sia $A := \{f : X \rightarrow K\}$ l'insieme delle funzioni da un fissato insieme X a valori su un campo K . Dimostrare che A è uno spazio vettoriale su K con le seguenti operazioni:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

5. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 sono dati i sottospazi:

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tc } 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$

$$K = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle.$$

- Calcolare la dimensione e una base di H e K ;
- Calcolare la dimensione e una base di $H + K$. Si tratta di una somma diretta?

6. Sono dati, in \mathbb{R}^4 , i sottospazi vettoriali

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tc } x + 2y = 2t = 0\}$$

$$K = \langle (1, 2, 0, 1), (2, 4, -1, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 4, 5), (1, -1, 0, 5) \rangle.$$

- Determinare la dimensione e una base di H , K , $H + K$ e $H \cap K$
- Il vettore $v = (1, 2, 3, 4)$ appartiene a $H + K$? In caso affermativo decomporlo nella somma di un vettore di H e uno di K .