GE110 Tutorato 5

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si mostri che una matrice $M \in M_{m,n}(K)$ ha rango $\leq 1 \Leftrightarrow$ esistono $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ tali che $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot (b_1, \ldots, b_n) = M$.

2. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo K. Si stabilisca quali delle seguente affermazioni sono vere:

   (a) $r(A+B) \leq r(A), r(B)$
   (b) $r(A) = r = r(B) \Rightarrow r(AB) = r \quad (r < n)$
   (c) $r(A) = n = r(B) \Rightarrow r(AB) = n$
   (d) $r(A) < n,\ r(B) < n \Rightarrow r(AB) < n$
   (e) $det(A+B) = det(A) + det(B)$
   (f) $det(kA) = k \cdot det(A)\ (k \in K)$

   Nel caso in cui siano vere, si esibisca una dimostrazione altrimenti fornire un controesempio.

3. Utilizzando il metodo di Kronecker-Rouché-Capelli si determinino le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari, al variare del parametro reale a:

$$(a) \begin{cases} x + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 2y = a \\ 3x + ay + z = 0 \\ 2ax - ay + z = a \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ ax + y + az = 1 \\ 3x + ay - az = 0 \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} ax+az=1\\ 3x+y+az=a\\ ax+3y=1\end{cases}$$

$$(e)\begin{cases} ay+az=a\\ ax+y+az=2\\ ax-ay-az=a\end{cases}$$

$$(f)\begin{cases} x+z=-2\\ 2x+y+t=-1\\ -y-2t-2z=2\\ 3x-3y+z+t=1\end{cases}$$

4. Si calcoli il determinante delle seguenti matrici nei casi in cui i coefficienti siano nel campo $K=\mathbb{Q}$.

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&a\\4&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&a\\2&a\end{pmatrix},$$
$$E=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&1\\a&0&1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\2&0&-\frac{1}{3}&1\\0&1&2&0\\3&-1&4&3\end{pmatrix}.$$

5. Si trovino i valori del parametro reale c per cui il rango delle seguenti matrici sia massimo:

$$A=\begin{pmatrix}1&c&c\\1&1&c\\2&c&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&1&c\\1&c&2&1\\c+1&0&c+1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&c&1&c\\c&2&c&3\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$
$$D=\begin{pmatrix}c&0&c\\c-1&1&0\\1&1&1\\c&2c&c\end{pmatrix}.$$

6. Dopo aver dimostrato che $det(M)=\pm1$, con $M\in O_n(K)$ (spazio delle matrici ortogonali $n\cdot n$ a valori in K), si dica se $O_n(K)$ è un sottospazio vettoriale di $M_n(K)$.