GE110 Tutorato 6

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e $W_h =< (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, -1), (2, 3, 2, h) >$.
(a) Si determinino le dimensioni di U e W_h e si scrivano esplicitamente due basi di tali sottospazi;
(b) si determinino le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;
(c) si determinino (se esistono) i valori di h per i quali $W_h \oplus U = \mathbb{R}^4$.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano W_1, W_2 due sottospazi di V di dimensioni n_1, n_2 rispettivamente e tali che $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
(a) Si dimostri che se U é un sottospazio U di V allora
$U \cap W_1 + U \cap W_2 \subseteq U \cap (W_1 + W_2)$;
(b) si determini per quali interi s_1, s_2 esiste un sottospazio U di V tale che:
$U + W_1 + W_2 = V$, $\quad dim(U \cap W_1) = s_1$, $\quad dim(U \cap W_2) = s_2$, $dim(U \cap (W_1 + W_2)) = s_1 + s_2$.

3. Sia k un numero reale. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + kx_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari si determinino i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

4. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano
$v_1 = e_1 - e_4,\ v_2 = e_2 - e_3,\ v_3 = e_1 + ke_2,\ v_4 = ke_2 + e_3.$

   (a) Siano $U =< v_1, v_2 >, W =< v_1, v_3, v_4 >$ i sottospazi generati. Si calcoli la dimensione di U e W;

   (b) si determini se esistono valori di k tali che $U \subset W$;

   (c) si determini se esistono valori di k tali che $dim(U \cap W) = 2$.

5. Si consideri lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Siano
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}.$

   (a) Sia $U =< A_1, A_2, A_3, A_4 >$ il sottospazio generato da esse. Si calcoli la dimensione di U.

   (b) Si determini un sottospazio W di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

   (c) Sia k un numero reale e siano
   $B_k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Si determinino (se esistono) i valori di k per i quali $dim(U \cap < B_k, C_k >) = 1$.

6. In $M_3(\mathbb{R})$ si considerino le seguenti matrici:
$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} k & h & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$
con $k, h \in \mathbb{R}$.

   (a) Si determinino i valori di k per cui attraverso operazioni elementari è possibile trasformare A in B e, per quei valori, si espliciti la sequenza di tali operazioni.

   (b) Per quali valori di k, C si può esprimere come prodotto di matrici elementari? Si espliciti tale prodotto.

   (c) Per quali valori di h e k, D è invertibile? Per tali valori si calcoli l'inversa.