GE110 Tutorato 9

a cura di Giordano Agostini, Giulia Salustri e Andrea Cattaneo

Università degli studi Roma Tre, Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2011/2012

1. Si consideri la matrice $W = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0\dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$.
   Mostrare che $DetW = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

2. Sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ lo spazio affine reale di dimensione 2 e $O(e_1, e_2)$ un riferimento affine. Si consideri il triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(-2,0)$ e $B(-1,2)$. Trovare il suo baricentro (punto di intersezione delle mediane).

3. Si consideri lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.
   (a) Sia r la retta di equazioni cartesiane: $r : \begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$
   Determinare le equazioni parametriche di r.
   (b) Sia s la retta di equazioni cartesiane: $s : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$
   Dire se r ed s sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il loro punto di intersezione.
   (c) Determinare le equazioni cartesiane della retta t complanare con le rette r ed s e passante per il punto $P = (1,0,1)$.
   (d) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta q passante per il punto $Q = (1,0,0)$ e parallela al vettore $v = (1,-1,4)$.
   (e) Dire se t ed q sono parallele, sghembe o incidenti. Nel caso in cui risultino incidenti determinare il punto di intersezione.

4. Esercizio dal secondo appello 2010/2011:
Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ siano (x, y, z) le coordinate di un generico punto rispetto al riferimento affine standard. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, si considerino i piani K,L,M di equazioni cartesiane $hx + (h + 1)y + (h + 2)z = 1$, $hx + (h - 1)y + (h - 2)z = 1$, $x + y + z = h$ rispettivamente.
(a) Si determinino i valori di h per cui $R := K \cap L \cap M \neq$ e, per ciascuno di tali valori,si calcoli $dim(R)$.
D'ora in avanti, sia $h = 1$.
(b) Dopo aver verificato che R è la retta per $(1, 0, 0)$ e $(2, -2, 1)$, si trovi il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^3_R$ contenente R e la retta S di equazioni cartesiane $y = z = 0$.
(c) Si determini il più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^3_R$ contenente R,S e la retta T di equazioni cartesiane $x = z = 0$.

5. Si risolvano con il metodo di Cramer i seguenti sistemi:
$$(a) \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases} ; (b) \begin{cases} x + z - t = 1 \\ y - z + t = 0 \\ x + y - z = -1 \\ -y + 2z + t = 1 \end{cases} .$$

6. Verificare che le seguenti applicazioni sono lineari e determinarne nucleo ed immagine:
(a) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita come $(x, y, z) \longrightarrow (2z-x, x+y, x+2y+2z)$;
(b) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita come $(x, y) \longrightarrow (x - 2y, 2x + y, 5y, 3x - y)$;
(c) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita come $(x, y, z) \longrightarrow (x + y - z, x - y + z)$