Tutorato di Istituzioni di Matematica
2 dicembre 2019

Esercizio 1. Quale tra le seguenti funzioni ha approssimativamente il grafico riportato?

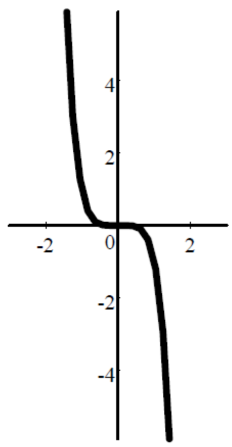

Figure 1: Esercizio 1

a) $f(x) = x^2$;

b) $f(x) = -x^2$;

c) $f(x) = -x^5$;

d) $f(x) = x^5$;

Esercizio 2. Si considerino le seguenti funzioni f(x):

a) $f(x) = -|logx| + 1$,

b) $f(x) = |2^{x-1} - 1|$,

c) $f(x) = \sqrt{|x|} - 1$,

d) $f(x) = |2^{x-1} - 1| - 1$.

dati i seguenti grafici :

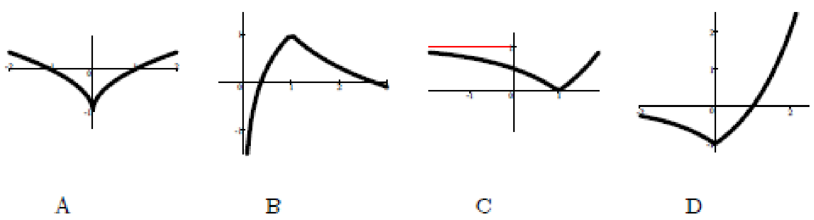

Figure 2: Esercizio 2

associarne uno ad ogni funzione e trovare le soluzioni di: **(1)** $\sqrt{|x|} < 1$, **(2)** $|2^x - 1| \geq 1$.

Esercizio 3. Utilizzando il grafico delle funzioni elementari coinvolte, risolvere per via grafica le seguenti disequazioni:

a) $2^x + 1 \leq 0$

b) $\sin x > 4 - x^2$

c) $\arctan x - x^2 > 0$

Esercizio 4. Disegnare il grafico di:

3.1 $f(x) = \begin{cases} x^4 - 2 & per \quad x < 0 \\ |1-x| & per \quad 0 \le x < 2 \\ \sqrt{x-2}+1 & per \quad x \ge 2 \end{cases}$ e dedurne:

- $*$ intervalli di monotomia;
- $*$ intervalli di convessitá;
- $*$ eventuali punti di massimo o minimo assoluti per f.

3.2 $f(x) = \begin{cases} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & per \quad x \le 0 \\ e^{-x} - 1 & per \quad x > 0 \end{cases}$ e dal grafico stabilire:

- $*$ se f é limitata nel suo insieme di definizione;
- $*$ l'estremo superiore in $(-\infty, 0)$;
- $*$ l'estremo inferiore in $(0, +\infty)$.

Esercizio 5. Disegnare il grafico e riconoscere le (eventuali) discontinuitá delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & se \quad x < 0 \\ \frac{2x}{x-5} & se \quad 0 \le x < 5 \\ \frac{1}{x^2} & se \quad x \ge 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+5)^2} & se \quad x < -5 \\ 3x+1 & se \quad -5 \le x \le 4 \\ \frac{1}{\log\left(\sqrt{x}-2\right)} & se \quad x > 4 \end{cases}$

Esercizio 6. Determinare per quali valori reali m e q la funzione:
$f(x) = \begin{cases} 3x + q & se\ x \le -1 \\ mx + 4 & x \ > -1 \end{cases}$ risulta continua in R. Successivamente, determinare m e q cosí da avere f continua in R e $f(-2) = f(5)$.

Esercizio 7. 5.1 Dopo averne determinato l'insieme di esistenza, calcolare, quando possibile, la derivata delle seguenti funzioni e studiarne i punti di non derivabilitá:

1. $f(x) = \frac{e^{2-x}}{1-3x}$
2. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x-2}$
3. $f(x) = \log\left(\frac{e^{2x}+3}{e^x+1}\right)$
4. $f(x) = \frac{2-x}{x^3+x^2}$
5. $f(x) = |x+1|$
6. $f(x) = e^{\frac{|x-2|}{x}}$
7. $f(x) = \sqrt{e^x - 1} - x$
8. $f(x) = \frac{e^{x-2}}{|1-x|}$

5.2 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni e studiarne i punti di non derivabilitá:

1. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
2. $e^{x^2+2x} + \cos(x \log x)$
3. $\frac{2x+1}{1-3x} \cos x$
4. $\arctan\left(x^2+1\right)$
5. $\frac{\sin x}{\cos x - 1}$
6. $\log|x + \sin x|$
7. $e^{\frac{x}{\log x}}$
8. $\frac{x^2+\cos x}{e^{x+1}}$
9. $\left(x^2+1\right)^{\log x}$

Esercizio 8. Scrivere le equazioni delle rette tangenti alle seguenti curve nei punti x_0 indicati a fianco:

1) $f(x) = e^x \quad x_0 = 0$ 2) $f(x) = \sqrt[5]{x} \quad x_0 = 0$ 3) $f(x) = \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

Esercizio 9. Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{2e^x+4x-1}{4x^2-5x+1}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan\left(1+x^2\right) - \frac{\pi}{4}}{\sin x}$
4. $\lim_{x \to 0+} \frac{\log(\log(x+1))}{\log(x)}$