Istituzioni di Matematica
Calcolo dei limiti (Parte 1)

Operazioni in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Sia $b \in \mathbb{R}$. Definiamo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} +\infty + b = +\infty, & +\infty + \infty = +\infty, \\ -\infty + b = -\infty, & -\infty - \infty = -\infty. \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{se } b \lessgtr 0, & +\infty \cdot b = \mp\infty, & -\infty \cdot b = \pm\infty, \\ (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty, & (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty, & (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty. \end{array}}$$

$$\boxed{\frac{b}{+\infty} = \frac{b}{-\infty} = 0.}$$

NOTA BENE: Le seguenti espressioni **NON** sono definite:

$$\boxed{+\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \tfrac{0}{0}, \quad \tfrac{\pm\infty}{0}, \quad \tfrac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0, \quad +\infty^0.}$$

Teorema (Calcolo dei limiti in $\overline{\mathbb{R}}$)
Supponiamo che $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ e che $b_n \to b \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

(1) $a_n \pm b_n \to a \pm b$, **se** $a \pm b$ è definito;
(2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$, **se** $a \cdot b$ è definito;
(3) (se $b_n \neq 0$) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, **se** $\frac{a}{b}$ è definito;
(4) (se $b_n \neq 0$) $\frac{1}{b_n} \to \pm\infty$, **se** $b_n \to 0^{\pm}$.

Teorema (Funzioni elementari e limiti)
Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una **funzione elementare** (dove D è il suo insieme di definizione) e siano $a_n, a \in D$ con $a_n \to a$. Allora $f(a_n) \to f(a)$.

Si ricorda che le **funzioni elementari** sono: le funzioni potenza, esponenziali e logaritmi, le funzioni trigonometriche e loro inverse, le funzioni iperboliche.

Teorema (Confronto di infiniti)
Per ogni $a > 0$ si ha

$$\boxed{\frac{n^a}{\log n} \to +\infty; \quad \frac{e^n}{n^a} \to +\infty; \quad \frac{n!}{e^{an}} \to +\infty; \quad \frac{n^n}{n!} \to +\infty.}$$

Più in generale abbiamo anche

Teorema. *Per ogni $a \neq 0$ e $b, c \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to+\infty} e^{an} n^b \ln^c n = \lim_{n\to+\infty} e^{an}.$$

Per ogni $b \neq 0$ e $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^b \ln^c n = \lim_{n\to+\infty} n^b.$$