Istituzioni di Matematica

Calcolo dei limiti (Parte II)

Successioni asintoticamente equivalenti. Due successioni $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ sono dette asintotiche (o asintoticamente equivalenti), e si indica $a_n \sim b_n$, se vale

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1. \tag{0.1}$$

Nota Bene: La definizione (0.1) ha senso solo quando $b_n \neq 0$ almeno definitivamente e, necessariamente, questo vale anche per a_n. Inoltre, se (0.1) è vera, allora è vera anche $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$. Quindi la relazione di asintotico $\sim$ è simmetrica ($a_n \sim b_n$ implica $b_n \sim a_n$), riflessiva (banalmente $a_n \sim a_n$) e transitiva

$$a_n \sim b_n \text{ e } b_n \sim c_n \Longrightarrow a_n \sim c_n.$$

Teorema. *Successioni asintotiche hanno lo stesso limite.*

Per dimostrarlo, sapendo che $a_n \sim b_n$ e $b_n \to \ell$, è sufficiente notare che

$$a_n = \frac{a_n}{b_n} b_n \to 1 \cdot \ell = \ell,$$

sfruttando il fatto che il limite del prodotto è il prodotto dei limiti non potendosi presentare forme indeterminate. Quindi anche $a_n \to \ell$.

ATTENZIONE: In generale, la relazione di asintotico si comporta bene solo con quozienti e prodotti:

Se $a_n \sim b_n$ e $\alpha_n \sim \beta_n$ allora

$$a_n\alpha_n \sim b_n\beta_n, \qquad \frac{a_n}{\alpha_n} \sim \frac{b_n}{\beta_n}, \qquad (a_n)^c \sim (b_n)^c,$$

purché c sia un reale indipendente da n!
NON vi è invece alcuna garanzia del fatto che si comporti bene con somme, differenze o sotto l'azione di funzioni (ad esempio, $a_n \sim b_n$ non implica che $e^{a_n} \sim e^{b_n}$ in generale) ! Ad esempio, facilmente si mostra che $n^2 + \sqrt{n} \sim n^2$ e $-n^2 \sim -n^2 + n$ ma, considerando la somma dei termini a destra e di quelli a sinistra della relazione ($n^2 + \sqrt{n} - n^2$ e $n^2 - n^2 + n$), NON è vero che $\sqrt{n} \sim n$!

Esercizio Mostrare che, se b_n e $a_n \to +\infty$ e $a_n \sim b_n$ allora $\log a_n \sim \log b_n$.

$o-$**piccolo.** Date due successioni a_n e b_n diciamo che $a_n = o(b_n)$ (si legge a_n è "o piccolo" di b_n) quando $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, per $n \to +\infty$.

Teorema. *Abbiamo* $a_n \sim b_n$ *se e solo se* $a_n = b_n + o(b_n)$.

Alcuni limiti notevoli

I) Supponiamo che $x_n \to +\infty$ oppure $x_n \to -\infty$ oppure $|x_n| \to +\infty$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}.$$

II) Supponiamo che $\varepsilon_n \neq 0$ e $\varepsilon_n \to 0$. Allora

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ ovvero $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$;
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \cos \varepsilon_n}{(\varepsilon_n)^2} = \dfrac{1}{2}$ ovvero $1 - \cos \varepsilon_n \sim \frac{(\varepsilon_n)^2}{2}$ per $n \to \infty$;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ ovvero $\tan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$;
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\arctan \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ ovvero $\arctan \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$;
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1$ ovvero $\log(1 + \varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$;
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1}{\varepsilon_n} = 1$ ovvero $\mathrm{e}^{\varepsilon_n} - 1 \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$;
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(1 + \varepsilon_n)^a - 1}{\varepsilon_n} = a,$ $a \in \mathbb{R}$ ovvero $(1 + \varepsilon_n)^a - 1 \sim a\, \varepsilon_n$ per $n \to \infty$;
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sinh \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 1$ ovvero $\sinh \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$ per $n \to \infty$.

Esercizio. Mostrare che se $b_n, a_n \to 0$ e $b_n \sim a_n$, allora $\sin b_n \sim \sin a_n$.