Istituzioni di Matematica

Calcolo dei limiti (Parte III)
Limiti di funzioni

Avendo definito i limiti di funzioni a partire dai limiti di successioni, anche per essi si possono dedurre le proprietà già dimostrate per i limiti di successioni. In particolare, riformuliamo i seguenti teoremi, utili per il calcolo dei limiti.

Teorema 1 (del confronto o dei "2 carabinieri")**.** *Se* $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ *per ogni* x *di un intorno anulare di* x_0*, e* $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$*, allora anche* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$*.*

Teorema 2 (permanenza del segno)**.** *Siano* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *ed* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

- *Se* $\ell > \alpha$*, allora* $f(x) > \alpha$ *definitivamente per* $x \to x_0$*.*
- *Se* $f(x) \geq \alpha$ *definitivamente per* $x \to x_0$*, allora* $\ell \geq \alpha$*.*

Teorema 3 (Gerarchie degli infiniti)**.** *Per ogni* $\alpha, \beta > 0$*,* $b > 1$*, e* $\gamma \in \mathbb{R}$ *abbiamo*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\beta(-\log x)^\gamma = 0.$$

Più in generale, abbiamo anche

Teorema 4. *Per ogni* $a \neq 0$ *e* $b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{ax}|x|^b(\log|x|)^c = \lim_{x\to\pm\infty} e^{ax}.$$

Per ogni $b \neq 0$ *e* $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^b(\log|x|)^c = \lim_{x\to+\infty} |x|^b.$$

Per ogni $b \neq 0$ *e* $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0^+} x^b|\log x|^c = \lim_{x\to 0^+} x^b.$$

Nel Teorema 4, la morale è che il comportamento della funzione di cui vogliamo determinare il limite è dato prioritariamente dall'esponenziale, poi dalla potenza e infine dal logaritmo.

1. Funzioni asintotiche

Definizione. Si dice che due funzioni f e g sono asintotiche per $x \to x_0$ se vale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{1.1}$$

e, in tal caso, si scrive $f \sim g$. Dalla definizione data a lezione di limite di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$ e dai limiti notevoli dati per successioni si deduce allora immediatamente che
per $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \log(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \tan x \sim x,$$
$$\arctan x \sim x, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

Osservazione. Piu in generale, se $\varepsilon(x) \to 0$ è una funzione infinitesima (cioè che tende a 0), le relazioni di asintotico precedenti si possono estendere a

$$\sin\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x), \quad \log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x), \quad e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x), \quad 1-\cos\varepsilon(x) \sim \frac{\varepsilon(x)^2}{2},$$
$$\tan\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x), \quad \arctan\varepsilon(x) \sim \varepsilon(x), \quad (1+\varepsilon(x))^a - 1 \sim a\varepsilon(x).$$

Commenti.

- La relazione $\sim$ (per $x \to x_0$) è una relazione di equivalenza (cioè, è riflessiva, simmetrica e transitiva)
- Se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste se e solo se esiste $\lim_{x\to x_0} g(x)$ e, in tal caso, i due limiti coincidono;
- Così come per le successioni, anche la relazione di asintotico relativamente alle funzioni si comporta bene in generale solo con quozienti e prodotti (e quindi potenze - indipendenti da x !!)

Per utilizzarlo correttamente: Supponiamo che per $x \to x_0$ si abbia $f_1(x) \sim f_2(x)$ e $g_1(x) \sim g_2(x)$, allora abbiamo

- $f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$, $f_1(x)/g_1(x) \sim f_2(x)/g_2(x)$, $|f_1(x)| \sim |f_2(x)|$
- $f_1(x)^a \sim f_2(x)^a, \quad \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- ATTENZIONE: le relazioni
$$(f_1(x)+g_1(x)) \sim (f_2(x)+g_2(x)), \quad e^{f_1(x)} \sim e^{f_2(x)}$$
possono essere false !

Esercizio. Si supponga che, per $x \to x_0$ si abbia $f_1(x) \sim f_2(x)$ con $|\log f_1(x)| \to +\infty$. Allora $\log f_1(x) \sim \log f_2(x)$.

2. o-PICCOLO

Definizione. Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in un intorno di x_0, si dice che

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

(e si legge "f è o-piccolo di g per $x \to x_0$") se accade che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{2.1}$$

Example 1. Si ha che

$$x^2 = o(x), \quad \text{per} \quad x \to 0$$

infatti

$$\frac{x^2}{x} \to 0, \quad \text{per} \quad x \to 0,$$

e anche che

$$e^{-1/x^2} = o(x^4), \quad \text{per} \quad x \to 0$$

infatti, dopo un cambio di variabile, dalla gerarchia degli infiniti segue

$$\frac{e^{-1/x^2}}{x^4} \to 0, \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

ATTENZIONE La proprietà di una funzione di essere o-piccolo di un'altra, è una proprietà locale, ossia dipende fortemente da dove si fa il limite. Infatti dal teorema del confronto si ha che

$$\sin x = o(x), \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

MA

$$\sin x \neq o(x), \quad \text{per} \quad x \to 0$$

(ricordare limiti notevoli).

Legge di trascuramento. $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$.