Université Paris-Dauphine, DEMI2E
Analyse 1 (2015-2016)

Corrigé du contrôle Continu 2 - Vendredi 11 décembre 2015
Groupes 2, 3, 5 et 6.

Exercice 1 (question de cours).
Se reporter au cours.

Exercice 2.

1. $f(x)$ est défini si et seulement si $(x^2+1)(x+1) \neq 0$, c'est-à-dire si $x+1 \neq 0$ car l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de racine réelle.
   On a donc : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   Il faut étudier les limites en -1 et en $\pm\infty$ puisque $\mathcal{D}$ n'est ni majoré ni minoré.

   — limite en -1 :
   A priori, il s'agit d'une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$, donc le polynôme numérateur de la fraction est divisible par $x+1$. En effectuant la division euclidienne, on obtient :
   $$f(x) = \frac{3x^3+2x^2+1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{(3x^2-x+1)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{3x^2-x+1}{x^2+1}$$
   et on a alors immédiatement $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \dfrac{5}{2}$.

   — limite en $\pm\infty$:
   On peut supposer $x \neq 0$ lorsqu'on fait tendre x vers l'infini. On écrit alors :
   $$f(x) = \frac{3x^3+2x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{x^3(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x})} = \frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x})}$$
   $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}) = 3$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x}) = 1$.
   On conclut : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$.
   Il n'y avait pas lieu ici de distinguer les cas $+\infty$ et $-\infty$.

2. $f(x)$ est défini si et seulement si $x^3-8 \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq 8^{\frac{1}{3}} = 2$.
   On a donc : $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
   Il faut étudier la limite en 2 et en $\pm\infty$ puisque $\mathcal{D}$ n'est ni majoré ni minoré.

   — limite en 2 :
   A cause de la valeur absolue, on va devoir étudier séparément limite à droite et limite à gauche.
   si $x > 2, |x-2| = x-2$ et $f(x) = \dfrac{x-2}{x^3-8}$, c'est une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$.
   $$f(x) = \frac{x-2}{x^3-8} = \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{1}{x^2+2x+4}$$
   On en déduit : $\lim\limits_{x\to 2_+} f(x) = \dfrac{1}{12}$.
   si $x < 2, |x-2| = 2-x$ et $f(x) = -\dfrac{x-2}{x^3-8}$; par le même calcul que ci-dessus, on

obtient $\lim\limits_{x \to 2_-} f(x) = -\dfrac{1}{12}$.
Les limites à droite et à gauche étant différentes, on conclut que f n'admet pas de limite au point 2.

— limite en $\pm\infty$:
De même qu'à la question précédente, on peut supposer $x \neq 0$ lorsqu'on fait tendre x vers l'infini. On a alors :

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^3-8} = \frac{|x|\left|1-\frac{2}{x}\right|}{x^3(1-\frac{8}{x^3})}$$

Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1-\frac{2}{x}) = 1$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1-\frac{8}{x^3}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{|x|^3} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, on conclut que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

3. $f(x)$ est défini si et seulement si, d'une part $\sqrt{x-1}$ est défini, c'est-à-dire $x \geq 1$, et d'autre part $\ln x$ est défini et non nul, c'est-à-dire $x > 0$ et $x \neq 1$.
En conclusion, $\mathcal{D} =]1, +\infty[$.
Il faut donc étudier la limite (à droite) en 1 et la limite en $+\infty$ puisque $\mathcal{D}$ n'est pas majoré.

— limite en 1 :
Cette fois encore, on trouve une forme indéterminée de type $\frac{0}{0}$.
Si $1 < x < 2$, on a $0 < x-1 < 1$, d'où $\mathrm{E}\left(\sqrt{x-1}\right) = 0$.
La fonction f est nulle sur l'intervalle ouvert $]1, 2[$, elle admet donc au point 1 une limite à droite nulle : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

— limite en $+\infty$:
Il s'agit ici d'une forme indéterminée de type $\frac{\infty}{\infty}$.
On écrit la double inégalité caractérisant la partie entière :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ \sqrt{x-1} - 1 < \mathrm{E}\left(\sqrt{x-1}\right) \leq \sqrt{x-1}$$

En divisant cette inégalité par $\ln x$ ($\ln x > 0$ sur $\mathcal{D}$), on obtient l'encadrement :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} < f(x) \leq \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$,

d'autre part, $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x} = \dfrac{\sqrt{x(1-\frac{1}{x})}}{\ln x} = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} = +\infty$ (croissance comparée au voisinage de l'infini des fonctions puissance et ln) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x} = +\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$, puis, cette fonction minorant f, que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 3.

1. De l'inégalité : $\sin(3x) \leq 1$ vraie pour tout réel x, on déduit facilement l'inégalité :

$$3 \leq 5 - 2\sin(3x) \ (*)$$

d'où a fortiori : $0 \leq 5 - 2\sin(3x)$, ce qui assure l'existence de $\sqrt{5 - 2\sin(3x)}$: la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \to 5 - 2\sin(3x)$ aussi comme composée et somme de fonctions continues, et on vient de vérifier que cette fonction prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \to \sqrt{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on conclut par le théorème de composition des fonctions continues que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\Big|f(x) - f(y)\Big| = \Big|\sqrt{5 - 2\sin(3x)} - \sqrt{5 - 2\sin(3y)}\Big| = \frac{2 \mid \sin(3y) - \sin(3x) \mid}{\sqrt{5 - 2\sin(3x)} + \sqrt{5 - 2\sin(3y)}}$$

En utilisant l'inégalité $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$, valable pour tout (a, b) de $\mathbb{R}^2$, on majore le numérateur de la fraction ci-dessus par $6\Big|x - y\Big|$.
En utilisant l'inégalité (*) de la question précédente et la croissance de la fonction $x \to \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on minore le dénominateur par $2\sqrt{3}$. On obtient ainsi :

$$\Big|f(x) - f(y)\Big| \leq \frac{6\Big|x - y\Big|}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}\Big|x - y\Big|$$

(b) D'après ce qui précède, f est $\sqrt{3}$-lipschtitzienne, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3. Intuitivement, f n'a pas de limite en $+\infty$ parce que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$. Pour le montrer en détail, il suffit d'après la proposition de la limite séquentielle d'exhiber deux suites (x_n) et (y_n) tendant toutes deux vers $+\infty$, mais telles que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ aient des limites différentes.
Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = n\pi$; on a pour tout entier n : $\sin(3n\pi) = 0$, d'où $f(x_n) = \sqrt{5}$.
Posons alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = (4n + 1)\frac{\pi}{6}$; on a pour tout entier n : $\sin((4n + 1)\frac{\pi}{2}) = 1$, d'où $f(y_n) = \sqrt{3}$.
Il est clair que les suites (x_n) et (y_n) tendent toutes deux vers $+\infty$, alors que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont constantes et distinctes, d'où la conclusion.

Exercice 4.

1. On écrit avec les quantificateurs que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$:

$$\forall A > 0, \quad \exists B_1 > 0, \quad \forall x > B_1, \quad f(x) \geq A$$

puis que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$:

$$\forall A > 0, \quad \exists B_2 > 0, \quad \forall x < -B_2, \quad f(x) \geq A$$

Pour $A =\mid f(0) \mid +1 > 0$, on détermine B_1 et B_2 et on pose $B = \max\{B_1, B_2\}$.
On a : $\forall x > B,\ x > B_1$ et $\forall x < -B,\ x < -B_2$. On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-B, B], \quad f(x) \geq\mid f(0) \mid +1 \geq f(0) + 1.$$

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur le segment $[-B, B]$.
D'après le théorème des bornes, f est bornée sur $[-B, B]$ et atteint ses bornes : en particulier, si m est la borne inférieure de f sur $[-B, B]$, il existe un réel c de $[-B, B]$ tel que $m = f(c)$.

   Mais m est aussi un minorant de f sur $\mathbb{R} \setminus [-B, B]$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-B, B], \quad f(x) \geq f(0) + 1 \geq f(0) \geq m,$$

   car $m = \inf\limits_{x \in [-B,B]} f(x)$ et $0 \in [-B, B]$.

   On conclut que m est un minorant de f sur $\mathbb{R}$; m étant atteint au point c, c'est le minimum et donc la borne inférieure de f sur $\mathbb{R}$.

3. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que l'image par f fonction continue de l'intervalle $[c, +\infty[$ est un intervalle.
Comme f est minorée par m, cet intervalle est nécessairement inclus dans la demi-droite $[m, +\infty[$. Mais $f(c) = m$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc $f([c, +\infty[) = [m, +\infty[$.
Tout point de $[m, +\infty[$ admet donc un antécédent dans $[c, +\infty[$: il existe un réel a de $[c, +\infty[$ tel que $f(a) = m + 1$, et comme $f(c) = m \neq m + 1$, on a $a \neq c$.

   En raisonnant symétriquement sur l'image par f de l'intervalle $]-\infty, c]$, on prouve l'existence d'un réel b de $]-\infty, c[$ tel que $f(b) = m + 1$.
Comme $b < c < a$, on a bien $b \neq a$, ce qui prouve que $m+1$ a au moins deux antécédents par f.