Esonero gennaio 2020 - draft correzione

1) La funzione $f(x) = \log(x^2 + 7)$ è: **convessa su** $(-\sqrt{7}, \sqrt{7})$.
Infatti, derivando due volte si ottiene

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 14}{(x^2 + 7)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 7 \Leftrightarrow -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}.$$

---

2) Sia $f(x) = \cos(2x^2)$. Il valore di $f^{(4)}(0)$ è: -48.
Infatti, sfruttando lo sviluppo di Taylor di $\cos y$, con $y = x^2$, per $x \to 0$ (anche $y \to 0$) si ottiene

$$f(x) = \cos(2x^2) = 1 - 2x^4 + \frac{16}{4!}x^8 + o(x^11).$$

Dal teorema di Taylor, si sa che tale forma polinomiale, per $x \to 0$, è unica e data da

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^N).$$

Identificando il coefficiente del termine di quarto grado, si ottiene allora

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -2 \Rightarrow f^{(4)}(0) = -4!2 = -48.$$

---

3) La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$ è invertibile sulla sua immagine. Il valore di $Df^{-1}(2)$ è: $3\sqrt[3]{64}$.
Infatti, sappiamo dall'invertibilità di f che $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ e $Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.
Invertendo f otteniamo:

$$f^{-1}(y) = y^3 - 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 6$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x + 2)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow Df^{-1}(2) = (f'(f^{-1}(2))^{-1} = 3\sqrt[3]{64}$$

---

4) Per i due limiti si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(3x^2 + x)}{\arctan x \log(1 + 4x)} = +\infty,$$

osservando che

$$\frac{\sin(3x^2 + x)}{\arctan x \log(1 + 4x)} \sim \frac{(3x^2 + x)}{4x^2}, \quad x \to 0,$$

mentre

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\sin^2 x} = -\frac{3}{2},$$

applicando due volte de l'Hôpital o gli sviluppi notevoli.

---

5) Effettuando il cambio di variabile $y = \cos x$ si ha

$$\int_0^2 \sin x \, e^{\cos x} \, dx = -\int_1^{\cos 2} e^y \, dy = e - e^{\cos 2}.$$

7)

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x+1)t \\ x(0) = 5 \end{cases}.$$

Dal teorema di esistenza e unicità, sappiamo che l'unica soluzione è data da

$$\int_5^{x(t)} \frac{du}{u(u+1)} = \int_0^t u\,du.$$

L'integrazione del membro sinistro si riduce a

$$\int_5^{x(t)} \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\,du = \left[\log\left|\frac{u}{u+1}\right|\right]_5^{x(t)} = \log\frac{x(t)}{x(t)+1} - \log\frac{5}{6},$$

dove abbiamo tolto il modulo poiché vicino a 0, $x(t)$ è continua e ha lo stesso segno del dato iniziale. Quindi abbiamo

$$\log\frac{x(t)}{x(t)+1} - \log\frac{5}{6} = \frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \frac{x(t)}{x(t)+1} = e^{\frac{t^2}{2}+\log\frac{5}{6}}$$

$$x(t)(1-\frac{5}{6}e^{\frac{t^2}{2}}) = \frac{5}{6}e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow x(t) = \frac{\frac{5}{6}e^{\frac{t^2}{2}}}{(1-\frac{5}{6}e^{\frac{t^2}{2}}).}$$

Poiché $e^{\frac{t^2}{2}}$ assume tutti i valori in $[1,+\infty]$, l'intervallo di definizione di $x(t)$ è il più ampio intervallo contenente $t=0$ in cui il denominatore non si annulla, pertanto $I = (-\sqrt{2\log\frac{6}{5}}, \sqrt{2\log\frac{6}{5}})$.