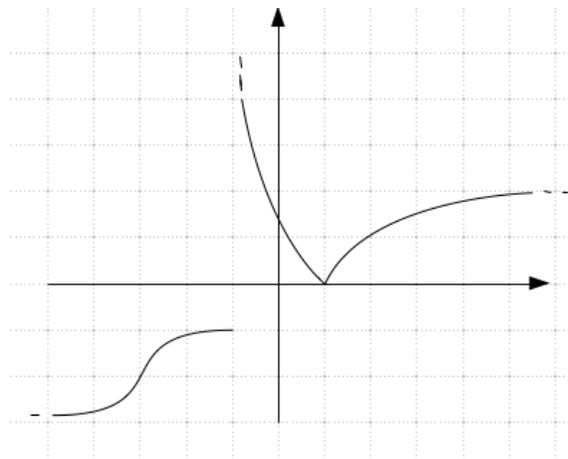


ISTITUZIONI DI MATEMATICA (Scienze Biologiche) A.A. 2019/2020
Esame Scritto 11 febbraio 2020 - docente J.E. Massetti

Cognome: Nome:.....

È consentito l'uso di appunti, libri e sbianchetto. **Non è consentito** l'uso di calcolatrici, tablet, telefoni smart o non smart.

Esercizio 1. (12 punti) Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è rappresentato in figura.



1. Il dominio di f è:

2. Determinare le seguenti immagini di intervalli

$$f([1, +\infty)) = \dots\dots$$

$$f((-\infty, -1]) = \dots\dots$$

$$f([-3, -1]) = \dots\dots$$

3. Determinare le seguenti contro-immagini

$$f^{-1}(-2) = \dots\dots$$

$$f^{-1}(-3, -1) = \dots\dots$$

$$f^{-1}([0, 1]) = \dots\dots$$

4. Determinare

$$f(-1) =$$

$$f(2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

5. Determinare i punti di non derivabilità di $f(x)$

6. Qual è il segno di $f''(x)$ per gli $x \in [1, +\infty)$?

7. Determinare i punti di discontinuità e dire se si tratta di discontinuità eliminabile oppure no, giustificare la risposta.

Esercizio 2. (12 punti) Sia

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2x^2}$$

1. Determinare il dominio di f e stabilire le eventuali simmetrie di f (parità/disparità)
2. Scrivere lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ arrestato all'ordine 2 con resto di Peano
3. Sfruttando il risultato al punto precedente, stabilire se 0 è un punto critico e determinarne la sua natura
4. Studiare la convessità/concavità di f
5. Tracciare un grafico qualitativo di f
6. Dopo aver dimostrato che i grafici di $f(x)$ e della parabola $g(x) = x^2$ si intersecano nei punti di coordinate $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, calcolare l'area della regione compresa tra $f(x)$ e $g(x)$.
7. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)f(x)$$

Esercizio 3. (8 punti) Trovare la soluzione locale del seguente problema di Cauchy e determinarne l'intervallo di definizione massimale

$$\begin{cases} \dot{x} = t(1 + 2x^2) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$