

Istituzioni di Matematica
Scritto del 21 gennaio 2019

Risolvere i seguenti esercizi giustificando opportunamente i passaggi
È consentito l'uso di appunti, libri e sbianchetto. **Non è** consentito l'uso
di calcolatrici, tablet, telefoni smart o non smart.

Esercizio 1 (10 punti). Sia $f(x)$ la funzione il cui grafico è rappresentato in figura.

- (1) Determinare il dominio di f
- (2) Determinare l'immagine di $(-2, 0]$
- (3) Determinare la contro immagine di $[0, +\infty)$
- (4) Determinare il valore di: $f'(3)$, $f(3)$ e $f^{-1}(0)$
- (5) Determinare

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

- (6) Determinare il segno di $f''(x)$ per gli $x \in (-\infty, -2)$

Esercizio 2 (15 punti). Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \frac{1 - \frac{9}{2}x^2 - \cos(3x)}{x^4}$$

- (1) Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine $n = 4$, con resto di Peano, della funzione $\cos(3x)$ in $x_0 = 0$
- (2) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e stabilire se $f(x)$ è estendibile con continuità anche in $x = 0$. In caso affermativo, scrivere la sua estensione continua.
- (3) Calcolare la derivata $f'(x)$. La funzione $f(x)$ è derivabile in $x = 0$? Giustificare la risposta.

Esercizio 3 (6 punti). Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{te^t}{x^{\frac{4}{3}}} \\ x(2) = 1 \end{cases}$$