Istituzioni di Matematica
Sviluppi di Taylor

Per semplificare la notazione, scriveremo (x, y) anche quando $x > y$, intendendo l'intervallo (y, x).

Sia I un intorno destro, sinistro o bilaterale di x_0 e $f : I \to \mathbb{R}$.

Teorema (Sviluppo di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Sia $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Allora $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$ esiste $t_x \in (x_0, x)$ tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{n + 1!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{0.1}$$

Osservazione. f è $n + 1$-volte derivabile su I con $f^{(n+1)}(x)$ continua su I (quindi anche tutte le derivate precedenti sono continue!).

Teorema (Sviluppo di Taylor con resto di Peano)**.** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che, se $n \geq 1$, f sia n volte derivabile in x_0. Allora per $x \to x_0$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \tag{0.2}$$

Osservazione. Per scrivere lo sviluppo di Taylor con resto di Peano (quindi in termini di o-piccolo) è fondamentale specificare "dove" sto facendo lo sviluppo; la formula (0.2) vale solo per gli x vicini a x_0, cioè, come nell'enunciato, per $x \to x_0$.

Gli sviluppi in $x_0 = 0$, sono anche conosciuti come sviluppi di Mc Laurin. In questo caso particolare, i risultati precedenti diventano:

$\star$ Se f è $n + 1$ volte derivabile in un intorno I di 0, allora $\forall x \in I \setminus \{0\}$, esiste $t_x \in (0, x)$ tale che:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{n + 1!}x^{n+1}.$$

$\star$ Se f è n volte derivabile in 0 allora, per $x \to 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Sviluppi notevoli in $x = 0$. Per $x \to 0$ valgono i seguenti sviluppi

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + o\left(x^k\right)$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2k+2}\right)$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2k+1}\right)$

- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2k+2}\right)$

- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o\left(x^6\right)$

- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o\left(x^k\right)$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + o\left(x^k\right)$

  dove, per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, $\binom{\alpha}{k}$ è il coefficiente binomiale generalizzato così definito

  $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

  In particolare, per $\alpha = -1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ si ottiene

  $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k\, x^k + o\left(x^k\right)$$

  $$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}\left(\varepsilon_n\right)^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Attenzione! I precedenti sviluppi delle funzioni elementari sono "centrati" in $x_0 = 0$, e sono utili SOLO per studiare il comportamento delle funzioni vicino a 0 (ad esempio nel calcolo di un limite in cui l'argomento della funzione in questione tende a 0). Ovviamente, se quello che voglio capire è il comportamento della funzione vicino ad un altro punto, fare lo sviluppo vicino a 0 non solo è inutile ma è anche sbagliato. Le formule qui sopra valgono solo localmente!

Esempio. Se vogliamo calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}},$$

ci troviamo davanti a una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$, poiché sia seno che coseno tendono a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ quando $x \to \frac{\pi}{4}$. <u>Vicino</u> a $x = \frac{\pi}{4}$, punto in cui sto facendo il limite, posso però scrivere le funzioni in un altro modo, facendone lo sviluppo di Taylor con resto di Peano. Ottengo quindi, per $x \to \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)\Big)\\ \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) + o\Big(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Sostituendo nel limite ottengo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x - \frac{\pi}{4}\big) + o\big(\big(x - \frac{\pi}{4}\big)\big) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x - \frac{\pi}{4}\big) + o\big(\big(x - \frac{\pi}{4}\big)\big) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Osservando che $\frac{\sqrt{2}}{2}\big(x - \frac{\pi}{4}\big) + o\big(\big(x - \frac{\pi}{4}\big)\big) \sim \frac{\sqrt{2}}{2}\big(x - \frac{\pi}{4}\big)$, calcolare il limite iniziale, è allora uguale a calcolare (se esiste!)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{+\frac{\sqrt{2}}{2}\big(x - \frac{\pi}{4}\big)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\big(x - \frac{\pi}{4}\big)} = -1.$$