

# ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

## Esercitazione 3

6 novembre 2019

**Esercizio 1.** Determinare per quali valori dei parametri  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \in \mathbb{R}$  la seguente funzione è continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|\alpha x|} & \text{se } x < 0 \\ \beta - 1 & \text{se } x = 0 \\ e^{\beta x}(2\beta - x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

**Esercizio 2** (\*). Studiare la continuità della funzione

$$f(x) = \frac{(e^x - 1) \log(1 + x^2)}{x(\sqrt[3]{1 + x^2} - 1)}.$$

Stabilire se essa è prolungabile per continuità e scriverne l'eventuale estensione continua.

**Esercizio 3.** Dimostrare che la funzione  $f(x) = \log(2 + \sin x)$  non ammette limite per  $x \rightarrow +\infty$ .

**Esercizio 4** (Un teorema di punto fisso). Supponiamo che  $f(x)$  sia una funzione continua nell'intervallo chiuso  $[0, 1]$  e che  $0 \leq f(x) \leq 1$  per ogni  $x$  in  $[0, 1]$ . Mostrare che deve esistere un valore  $c$  in  $[0, 1]$  tale che  $f(c) = c$ . Tale  $c$  è detto *punto fisso* della funzione  $f$ .

**Esercizio 5.** Calcolare i seguenti limiti:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4x^4}\right)^{x^4 - 2x}$

- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{\sin x}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \log \frac{1}{x} \right)$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(3+x^2)}{x^2}$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \arctan(x^4 - 3x)}{5x^6 + 2x^3}$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{xe^{3x}}$
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^3 + 3x) \sin(x^4 + x)}{1 - \cos(2x)}$
- (h\*)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x} - \log(1+x)}$
- (i\*)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x^2}{\sqrt{x} + (\sqrt{x+1} - 1)}$