

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

Esercitazione 7

27 novembre 2019

Esercizio 1. Studiare continuità e derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$.

Esercizio 2. Scrivere lo sviluppo di McLaurin con resto di Peano fino all'ordine 5 della funzione $f(x) = \tan x$. [*Suggerimento:* Sfruttare gli sviluppi noti delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$.]

Esercizio 3 (*). Dopo aver stabilito se $f(x) = \frac{\sin x}{\cos(2x)}$ sia pari o dispari, calcolare $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$. [*Suggerimento:* calcolare lo sviluppo di McLaurin sfruttando il "trucco" usato nell'Esercizio 2.]

Esercizio 4. Determinare lo sviluppo di McLaurin con resto di Peano di ordine 4 delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \log(\cos x)$

(b*) $f(x) = e^{\sin x^2}$

Esercizio 5. Dimostrare che vale la seguente disuguaglianza per ogni $x > 0$:

$$\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}.$$

[*Suggerimento:* usare lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange.]

Esercizio 6. Si consideri la funzione $f(x) = e^{2x} - 1 - \log(1+2x) - 4x^2$.

(a) Determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato all'ordine 3.

- (b) Sfruttando tale risultato, stabilire di che natura è il punto $x_0 = 0$.
- (c) Sempre sfruttando lo sviluppo di McLaurin ottenuto in (a), calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}.$$

Esercizio 7 (*). Si consideri la funzione $f(x) = -\sqrt{1 + 3x^2} + \cos(5x)$:

- (a) Determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato all'ordine 2.
- (b) Sfruttando tale risultato, determinare la natura del punto $x_0 = 0$.
- (c) Sempre sfruttando lo sviluppo di McLaurin ottenuto in (a), calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{7x^2}.$$

Esercizio 8. Calcolare i seguenti limiti (usando gli sviluppi di Taylor):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \sqrt{1 + 2x} - 1}{4x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + 2 \cos x - 3}{x \sin(x^3)}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$
- (d*) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}$
- (e*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2}}{\sin^2 x}$
- (f*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$
- (g*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \tan x}$