ISTITUZIONI DI MATEMATICHE
Esercitazione 9

8 gennaio 2020

Esercizio 1. Calcolare l'area della regione di piano:

(a) delimitata da $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = e$, $x = e^2$;

(b) sopra $y = x^2 - 4x$ e sotto l'asse x;

(c) compresa tra il grafico della funzione $f(x) = -x(x+2)$ e le rette $y = 0$, $x = -2$ e $x = 1$;

(d*) delimitata dal grafico della funzione $f(x) = x^2 - 3x$ e dalle rette $y = 0$, $x = -1$ e $x = 4$;

(e*) compresa tra le rette $x = 0$ e $x = 1$ e tra i grafici di $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ e $g(x) = -x$.

Esercizio 2. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = x \sin(t) + \sin(2t) \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali a variabili separabili:

(a) $\begin{cases} x' = \dfrac{x^2+1}{t^2+1} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

(b*) $\begin{cases} \dfrac{x'}{\sqrt{x}} = -\dfrac{2t}{1-t^2} \\ x(2) = 1 \end{cases}$

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti usando gli sviluppi di Taylor:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{2x + x^2 + 1 - \frac{e^x - 1}{x}}$;

(b*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right)}{2(\cosh x - 1)\sinh x}$.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti usando il Teorema di De l'Höpital:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{x^2}}{\sin^2 x}$;

(b*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x}$.

Esercizio 6. Si verifichi che la funzione $f(x) = e^x + \sqrt{2x+1}$ è invertibile nel suo dominio e si calcoli la derivata di f^{-1} in $y = f(0)$.

Esercizio 7 (*). Si verifichi che la funzione $f(x) = \log x - \frac{1}{x^3}$ è invertibile nel suo dominio e si calcoli la derivata di f^{-1} in $y = f(1)$.

Esercizio 8. Studiare monotonia e convessità delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \log(3x) + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$;

(b) $f(x) = (1 + x^8)\arctan(x^4)$;

(c*) $f(x) = \log(2x+2) - \arctan(\sqrt{x}) - \log 2$.

Esercizio 9 (*). Disegnare il grafico di una funzione $f(x)$ che sia convessa in $(1, +\infty)$ e che soddisfi le proprietà:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad f'(-3) = 0.$$