Corso 2. Funzioni & compagnia (2h) 1ª settimana 5.10

Per definire una funzione di una variabile reale abbiamo bisogno di tre cose:

1) Un insieme di partenza (insieme/dominio di Definizione): $D \subseteq \mathbb{R}$
2) Un insieme di arrivo F
3) Una relazione funzionale che associa ad ogni elemento x di D un UNICO elemento $f(x)$ di F.

$$f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Diciamo allora che f è definita su D ed ha valori in F.

$\forall x$, · $f(x)$ è l'immagine di x tramite f

· Chiamiamo Immagine di f l'insieme delle immagini di tutti gli elementi di D, i.e.

$$f(D) = \operatorname{Im} f = \{ y \in F : \exists x \in D \text{ t.c. } f(x) = y \}$$

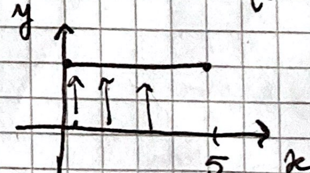
· $\forall y \in F$ diremo che x è la retro-immagine di y se $f(x) = y$.

Oss. Per def ogni $x \in D$ ha un'Immagine in F

MA non è vero che ogni elemento y in F abbia retro-immagine (o antecedente)

Ex 1

· $f_1: [0,5] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2$

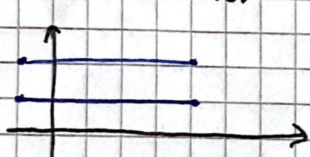


· $\operatorname{Im} D = \{2\}$

$\forall x \in [0,5]$ è retro immagine di 2 tramite f → 2 ha molti antecedenti

· $\forall y \neq 2$ non ha antecedente in D

· f_2:

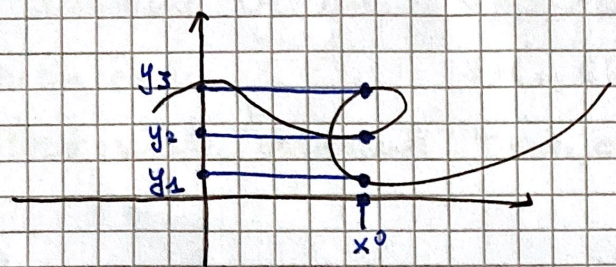


è grafico di una funzione?

(Grafico). Il grafico di una funzione f è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$Gr(f) = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \in \mathcal{D} \}$$
$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \in \mathcal{D} \text{ e } y = f(x) \}.$$

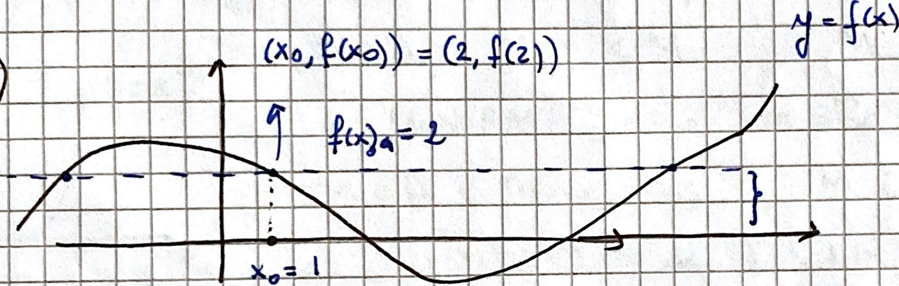
Ex



È il grafico di una funzione? NO!

x_0 ha 3 immagini!

Ex



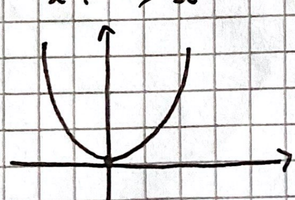
Oss: $f(x_0)$ ha tre antecedenti (o pre-immagini, o controimmagini)

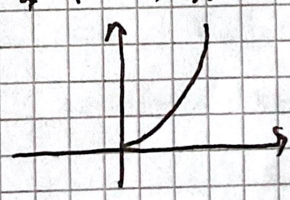
Se E è un sottoinsieme di $\mathcal{D}$ possiamo anche considerare la restrizione di $f|_E$. Questo serve perché a volte una funzione gode di certe proprietà solo se considerata su una parte più piccola del suo Dominio, una restrizione appunto.

Ex!

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$ $\qquad$ $x \longmapsto x^2$



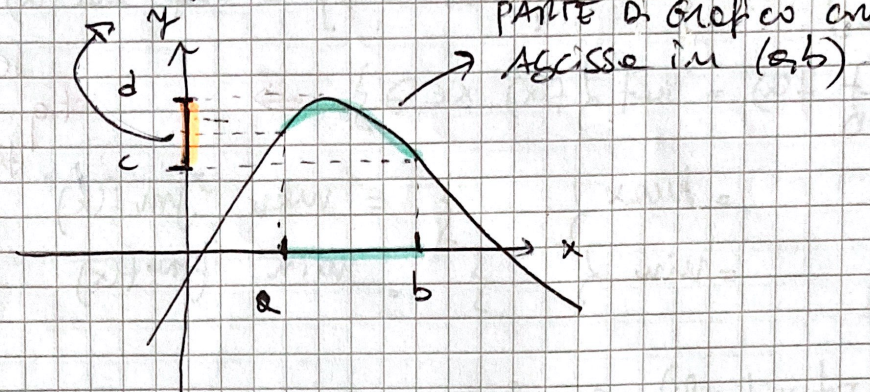


Sono profondamente diverse anche se la legge fun. è la stessa.

Immagine di un sottoinsieme di D

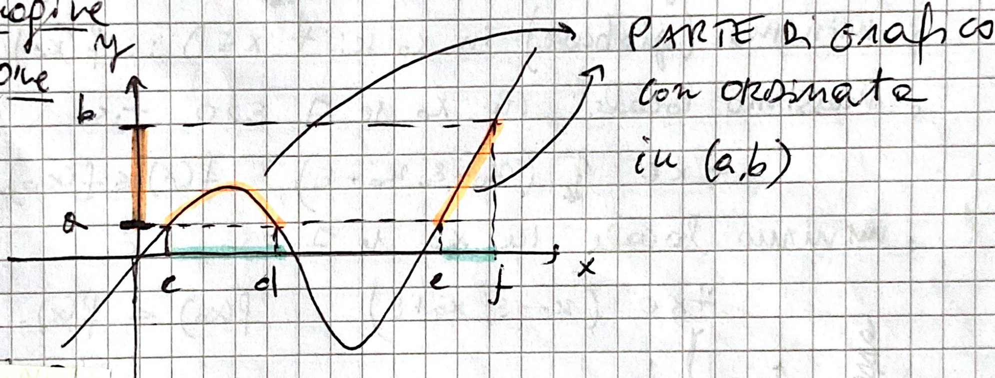
Grafico $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \in D, \ y = f(x)\}$

Immagine di (a,b)



$$f((a,b)) = \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in (a,b) \text{ con } y = f(x) \} = (c,d)$$

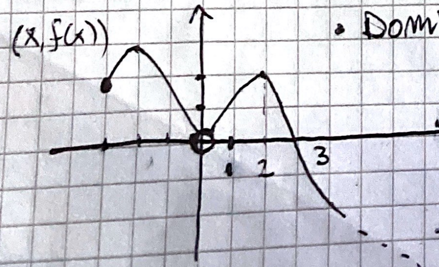
PRE-immagine o **contro-immagine**



$$f^{-1}((a,b)) = \{ x \in D : f(x) \in (a,b) \} = (c,d) \cup (e,f)$$

In questo caso (a,b) si disegna sull'asse y ordinata, si proietta per determinare la PARTE DI GRAFICO che ha ✓ "compresa" tra (a,b) e si proietta sulle ascisse. Gli $x \in (c,d)$ o (e,f) sono nella controimmagine.

Esempio "PRATICO" (TIPICO ESAME). **Convenzione**: "Pallino Pieno" = quel punto APPARTIENE al Grafico della fz. "Pallino vuoto" = quel punto NON appartiene al Grafico



- Dominio di $f = [-3,0) \cup (0,+\infty)$
- $f^{-1}(0) = \{3\}$
- $f((0,+\infty)) = ?$ R: $(-\infty, 2]$, $f(-2) = 3$