Istituzioni di Matematica
Alcuni esercizi sui polinomi di Taylor

Esercizio 1.

- Scrivere lo sviluppo di McLaurin, con resto di Peano, arrestato all'ordine $n = 4$ della funzione $f(x) = \arctan(4x)$, per $x \to 0$.

- Scrivere lo sviluppo di Mc Laurin, con resto di Peano, all'ordine $n = 12$ della funzione
$$f(x) = e^{x^3} - 1 - \sin x^3.$$
Suggerimento: eseguire la sostituzione $z = x^3$.

- Scrivere lo sviluppo di McLaurin, con resto di Peano, arrestato all'ordine $n = 3$ di $f(x) = \ln(1 + \sin x)$, per $x \to 0$.
Suggerimento: osservare che $\sin x \to 0$ *quando* $x \to 0$ *ed eseguire la sostituzione opportuna.*

- Scrivere lo sviluppo di Taylor, con resto di Peano, delle seguenti funzioni, nel punto indicato fino all'ordine indicato
$$f(x) = e^x \quad \text{in } x_0 = -1 \quad \text{ordine } n = 3$$
$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{per } x \to +\infty \quad \text{ordine } n = 3$$
$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{per } x \to +\infty \quad \text{ordine } n = 4$$
$$f(x) = \cos x \quad \text{in } x_0 = \pi/2 \quad \text{ordine } n = 6$$
$$f(x) = \ln x \quad \text{in } x_0 = 2 \quad \text{ordine } n = 3$$
Osservazione: il secondo e terzo sviluppo non devono allarmare; basti notare che $\frac{1}{x} \to 0$ *quando* $x \to +\infty$.

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}.$$
Risposta: $\frac{11}{24}$

Esercizio 3. Sia f una funzione 4 volte derivabile in 0 e tale che $f(x) = 1 + 2x + 5x^2 + x^4 + o(x^4)$ (per $x \to 0$). Determinare i valori di tutte le derivate di f in 0 fino all'ordine 4 incluso.

Esercizio 4. Dopo aver stabilito se
$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$$
sia pari o dispari, calcolare i valori di $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

Esercizio 5. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right). \qquad \text{Risposta: } \frac{1}{2}$$