Istituzioni di Matematiche - CdL in Scienze Biologiche, Univ. Roma Tre

Simbologia, cenni di logica e teoria degli insiemi

$\forall$ si legge "per ogni"
$\exists$ si legge "esiste"
$\exists!$ si legge "esiste un unico"
$\Rightarrow$ si legge "allora" oppure "implica"
$\Leftrightarrow$ si legge "se e solo se"

Quando una proposizione o proprietà $\mathcal{P}$ "implica" un'altra proposizione o proprietà $\mathcal{P}'$ (si scrive $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'$), possiamo esprimere equivalentemente il concetto dicendo: *$\mathcal{P}$ è condizione sufficiente perché valga $\mathcal{P}'$* oppure *$\mathcal{P}'$ è condizione necessaria perché valga $\mathcal{P}$.*
ATTENZIONE: non è vero che se vale $\mathcal{P}'$, allora vale $\mathcal{P}$. Bensì, *Se non vale $\mathcal{P}'$ allora non vale $\mathcal{P}$* (i.e. *non* $\mathcal{P}' \Rightarrow$ *non* $\mathcal{P}$, che viene detta contro nominale della proposizione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'$).
Se avessimo $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}'$, allora le due proposizioni sarebbero equivalenti: $\mathcal{P}$ sarebbe sia condizione sufficiente che necessaria affinché valga $\mathcal{P}'$. Idem dicasi per $\mathcal{P}'$.

Esempio 0. E' equivalente scrivere:
- Piove $\Rightarrow$ il terreno è bagnato
- Se Piove, allora il terreno è bagnato
- Piovere è condizione sufficiente affinché il terreno sia bagnato
- Condizione necessaria affinché piova, è che il terreno sia bagnato.
- Se il terreno non è bagnato, allora non piove.

Esercizio. Si consideri la seguente proposizione "Ogni potenza positiva di 2 è un numero pari" e si risponda alle seguenti domande:
1) Tutti i numeri pari sono potenze di 2 ?
2) 2^{331} è un numero pari ?
3) 31 è una potenza di 2 ?
4) completare la frase "Condizione sufficiente affinché un numero sia pari..."
5) completare la frase "Se un numero è una potenza positiva di 2, necessariamente..."
6) completare la frase "Se un numero è dispari, allora....."

Sia B un qualsiasi insieme (l'insieme degli studenti di Roma Tre più alti di 1m70, l'insieme dei numeri naturali etc..).

$$x \in B \qquad \text{(si legge } x \text{ "appartiene" a } B\text{)}$$

significa che x è un elemento di B. Per indicare invece che un elemento x non appartiene ad B si scriverà $x \notin B$.
- Se A è un altro insieme con la proprietà che ogni elemento di A è anche un elemento di B diremo che A è un sottoinsieme (o parte) di B, e scriveremo $A \subset B$, in simboli:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a : a \in A \Rightarrow a \in B.$$

Da questa definizione segue immediatamente che la proprietà di inclusione è riflessiva. Infatti

$$A \subset A \quad \text{poiché } \forall a : a \in A \Rightarrow a \in A.$$

N.B. Le relazioni di "appartenenza" e "inclusione" sono concettualmente molto diverse tra loro, nonostante nella vita di tutti i giorni spesso utilizziamo questi termini come sinonimi. In effetti, la relazione di "appartenenza" non è riflessiva.
Esempio 1. Sia $B = \{$ mezzi di trasporto $\}$, $A = \{$ motociclette $\}$. Abbiamo $A \subset B$ ma $A \notin B$. (infatti: l'insieme delle motociclette è un sottoinsieme dell'insieme dei mezzi di trasporto, ma NON è un mezzo di trasporto in sè.)
Esempio 2. Sia $B = \{\{1,2,3\},4,5,\{6\}\}$. Gli elementi di B sono: $\{1,2,3\},4,5,\{6\}$
N.B. $\{6\}$ significa l'insieme contenente solamente 6, pertanto $6 \notin B$ ma $\{6\} \in B$.
$A = \{4,5,\{6\}\} \subset B$, $2 \notin B$ ma $4 \in B$. Mentre $C = \{1,2,3\}$ è un elemento di B, quindi possiamo scrivere $C \in B$, ma C non è un sottoinsieme di B poiché nessun elemento di C (ossia $1,2,3$) è un elemento di B.
Esempio 3. Sia $B = \{[0,1],[2,3],[4,+\infty)\}$.
$A = [0,1] \in B$ mentre $\frac{1}{2} \notin B$.
$A = \{[0,1],[4,+\infty)\} \subset B$.

L'**unione** fra due insiemi A e B si indica con $A \cup B$ ed è l'insieme costituito da tutti gli elementi x che appartengono ad almeno uno dei due sottoisiemi A e B:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \textbf{ oppure } x \in B.$$

L'**intersezione** fra A e B si indica con $A \cap B$ ed è l'insieme costituito da tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \textbf{ e } x \in B.$$

N.B. L'insieme B definito nell'esempio 3 **non è l'unione** $[0,1] \cup [2,3] \cup [4,+\infty)$.