Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2020 – 2021
J.E. Massetti

ESERCITAZIONE 1 DEL 29 SETTEMBRE 2020

Esercizio 1 (Alcuni esempi di misura)**.** *Dimostrare che le seguenti funzioni μ definiscono misure positive sulle rispettive σ-algebre.*
1) Sia $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty)$ definita da $\mu(A) = \sum_{j \in A} 2^{-j}$.
2) Sia $X \neq \emptyset$ al più numerabile e $f : X \to [0, +\infty]$ una funzione assegnata. Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ definita come

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & E = \emptyset \\ \sum_{x \in E} f(x) & E \neq 0 \end{cases}$$

3) Push-forward: Siano $(X, \mathcal{M}, \bar{\mu})$ uno spazio di misura e $(Y, \mathcal{M}')$ uno spazio misurabile. Sia $f : X \to Y$ misurabile e sia $\mu = f_* \bar{\mu} : \mathcal{M}' \to [0, +\infty]$ definita come

$$\mu(A) := f_* \bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(f^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathcal{M}'.$$

1) Banalmente $\mu(\emptyset) = 0$, riducendosi alla somma su nessun indice. Presa una collezione $\{A_j\}$ di elementi di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a due a due disgiunti, e definendo $A = \cup_k A_k$, si ha

$$\mu(A) = \sum_{j \in A} 2^{-j} = \sum_{j_1 \in A_1} 2^{-j_1} + \sum_{j_2 \in A_2} 2^{-j_2} + \cdots = \sum_k \mu(A_k),$$

ove abbiamo riarrangiato i termini della serie sfruttando l'incondizionato comportamento della serie a termini positivi.

2) Dato che X è al più numerabile, per ogni $E \subset X$ si ha $E = \{x_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ con $\mathcal{K} \subset \mathbb{N}$ e $\mu(E) = \sum_{k \in \mathcal{K}} f(x_k)$. Poiché f è a valori non negativi, si può provare analogamente a sopra l'additività di μ.
Si osservi che quando $f \equiv 1$, μ è la misura del conteggio.

3) Si ha che $\mu(\emptyset) = 0$, poiché $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$ poiché $\bar{\mu}$ è una misura.
Presa $\{A_j\}$ collezione disgiunta di elementi di $\mathcal{M}'$, si osservi che, poiché f è misurabile, gli insiemi $B_j = \{x \in X : f(x) \in A_j\}$ definiscono una collezione disgiunta di elementi di $\mathcal{M}$: dal fatto che $\bar{\mu}$ è una misura su $\mathcal{M}$ segue allora che

$$\mu(\cup_j A_j) = \bar{\mu}\big(f^{-1}(\cup_j A_j)\big) = \bar{\mu}(\cup_j f^{-1}(A_j)) = \bar{\mu}(\cup_j B_j) = \sum_j \bar{\mu}(B_j) = \sum_j \mu(A_j).$$

Esercizio 2 (Teorema di Fubini per serie)**.** *Sia $a : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ e μ la misura del conteggio su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*
1) Mostrare che $\int_{\mathbb{N}} a \, d\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} a(j)$
2) Dedurre che se $a_{j,i} \geq 0$ per $\forall j, i \in \mathbb{N}$ allora $\sum_j \sum_i a_{j,i} = \sum_k \sum_j a_{j,i}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere tautologicamente $a(n)$ come $a(n) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a(j)\chi_{\{j\}}(n)$ e osservare che la successione $a_N(n) = \sum_{j=0}^{N} a(j)\chi_{\{j\}}(n) \longrightarrow a(n)$ per $N \to +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, con a_N monotona non decrescente. Per il teorema di convergenza monotona si ha allora

$$\int_{\mathbb{N}} a\, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{N}} a_N\, d\mu.$$

In particolare

$$\int_{\mathbb{N}} a_N\, d\mu = \int_{\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{N} a(j)\chi_{\{j\}}\, d\mu = \sum_{j=0}^{N} \int_{\mathbb{N}} a(j)\chi_{\{j\}}\, d\mu = \sum_{j=0}^{N} a(j)\mu(\{j\}\cap\mathbb{N}) = \sum_{j=0}^{N} a(j)$$

poiché abbiamo una somma finita di funzioni misurabili e $\mu(\{j\}\cap\mathbb{N}) = 1$, da cui

$$\int_{\mathbb{N}} a\, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{N}} a_N\, d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} a(j) = \sum_{j=0}^{+\infty} a(j).$$

2) Dato $a_{j,i} = a(j,i)$ con $a(\cdot,\cdot) : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to [0,+\infty]$, dal punto precedente segue che, fissato j, $a(j,\cdot) : \mathbb{N} \to [0,+\infty]$ soddisfa $\int_N a(j,\cdot)d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{j,i}$ e si ha, per il teorema di Beppo Levi che

$$\int_N \sum_{j=0}^{+\infty} a(j,\cdot)\, d\mu = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{j,i}$$

ove il membro a sinistra, soddisfa

$$\int_N \sum_{j=0}^{+\infty} a(j,\cdot)\, d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{j,i}$$

utilizzando 1) applicato alla funzione $a = \sum_j a(j,\cdot) : \mathbb{N} \to [0,+\infty]$. La tesi segue.

Esercizio 3. *Provare che se f è una funzione reale su uno spazio misurabile X tale che $\{x : f(x) \geq r\}$ è misurabile per ogni razionale r, allora f è misurabile.*

Ricordando che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha,+\infty))$, preso $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, per densità dei razionali in $\mathbb{R}$ posso prendere una successione monotona di razionali $\{q_k\} \to \alpha$ per $k \to +\infty$. Dunque, in base alla monotonia di q_k si ha che

$$(\alpha,+\infty] = \bigcap_k [q_k,+\infty] \quad \text{oppure} \quad (\alpha,+\infty] = \bigcup_k [q_k,+\infty]$$

a seconda che la successione sia crescente o decrescente. Segue allora che $(\alpha,+\infty]$ è misurabile poiché intersezione o unione numerabile di insiemi misurabili, ne segue che f è misurabile.

Esercizio 4. *Date $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni in $\mathbb{R}$, provare che*

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Per ogni $p \geq n$ si ha che $a_p + b_p \leq \sup_{j\geq n} a_j + \sup_{j\geq n} b_j$ da cui segue che

$$\sup_{p\geq n} a_p + b_p \leq \sup_{j\geq n} a_j + \sup_{j\geq n} b_j.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene la tesi.

Esercizio 5. *Sia f misurabile e non negativa su $\mathbb{R}$ tale che* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$.
Dimostrare che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+nx^2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Osservazione: In generale, se (X,μ) è uno spazio misurabile data $f : X \to \mathbb{R}$ se $f \in L^1(\mu) \Longrightarrow$ f è finita quasi ovunque. In effetti, se

$$A = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = \{x \in X : |f(x)| > k\}$$

allora

$$k\mu(A_k) = \int_{A_k} k\, d\mu \le \int_{A_k} |f|\, d\mu \le \int_X |f|\, d\mu$$

utilizzando la monotonia dell'integrale e il fatto che $A_k \subset X$ per ogni k. In particolare, poiché gli $A_k \searrow$ con $\mu(A_1) < \infty$ poiché f è sommabile per ipotesi, possiamo passare al limite nella disuguaglianza $\mu(A_k) \le 1/k \displaystyle\int_X |f|\, d\mu$ e dedurre che $\mu(A_k) \to \mu(A) = 0$.

Posto allora $f_n(x) = \dfrac{f(x)}{1+nx^2}$, osserviamo che $f_n(x) \to 0$ per ogni $x \neq 0$ mentre $f_n(0) \to f(0)$. Inoltre $0 \le f_n(x) \le f(x)$ per ogni n con $f \in L^1(\mu)$. Per il teorema di Lebesgue di convergenza dominata otteniamo allora il limite cercato, scambiando limite e integrale e ricordandoci che $\displaystyle\int_E f d\mu = 0$ se $\mu(E) = 0$ anche se $f(x) = \infty$ per ogni $x \in E$.

Esercizio 6. *Calcolare* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} \cos\frac{1}{nk}.$

Se μ è la misura del conteggio su $\mathbb{N}$, allora possiamo riscrivere la serie come $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f_n(k)\mathrm{d}\mu(k)$, con $f_n(k) = e^{-k}\cos\dfrac{1}{nk}$.
Poiché le f_n sono funzioni non negative e $f_n(k) \underset{n\to+\infty}{\nearrow} e^{-k} := f(k)$, allora possiamo applicare il teorema della convergenza monotona:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{N}} f_n(k)\mathrm{d}\mu(k) = \int_{\mathbb{N}} f(k)\mathrm{d}\mu(k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e-1}.$$

Alternativamente: osservando che $|f_n(k)| \le e^{-k} =: f(k)$ dove $e^{-k} \in L^1(\mu)$ poiché $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_k e^{-k} < \infty$, e che $f_n(k) \to f(k)$, $n \to +\infty$ possiamo applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e ottenere la tesi osservando che .

Esercizio 7. *Dimostrare l'uguaglianza*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Per ogni $n \ge 0$ osservo che $f_n(x) = xe^{-nx} \ge 0$ per ogni $x \ge 0$ e che, dalla somma della serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = x\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n = x\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Poiché le f_n sono non negative allora si può applicare il teorema di Beppo Levi e scambiare serie e integrali ottenendo così: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-nx}\, dx.$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Nell'ultimo calcolo abbiamo utilizzato il fatto che $[0, +\infty] = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, n]$ con $[0, n] \subset [0, n+1]$ per ogni n, pertanto $\mu([0, n]) \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \mu([0, +\infty])$ ove $\mu(E) = \displaystyle\int_E f d\mu$ con μ una misura positiva, in questo caso quella di Lebesgue dx. Le xe^{-nx} essendo integrabili secondo Riemann su $[0, n]$, $\forall n$, sono integrabili anche secondo Lebesgue e i due integrali coincidono.

Dunque otteniamo l'uguaglianza

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$