Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2020 – 2021
J.E. Massetti

Esercitazione 2 del 13 Ottobre 2020

Esercizio 1. *(Convergenza monotona non crescente) Sia $f_n : X \to [0, +\infty]$ misurabile per $n = 1, 2, \ldots$ e siano $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n \geq \cdots \geq 0$ con $f_n(x) \to f(x)$, $n \to +\infty$ μ-q.o. in X e sia $f_1 \in L^1(\mu)$. Dimostrare che vale l'uguaglianza*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \,. \tag{1}$$

Soluzione: Sia $g_n := f_1 - f_n$, per $n = 1, 2, \ldots$. Essendo la successione delle f_n monotona non crescente, allora $(g_n)_{n\geq 1}$ è monotona non decrescente e si ha, per ipotesi di convergenza μ-q.o. che $g_n(x) \to f_1(x) - f(x) =: g(x), n \to +\infty$ per ogni $x \in X \setminus E$ con $\mu(E) = 0$. Estendendo arbitrariamente g in modo misurabile su tutto X, e si ha per il teorema di convergenza monotona[1]

$$\int_X f_1 - f_n \, d\mu = \int_{X\setminus E} f_1 - f_n \, d\mu + \underbrace{\int_E f_1 - f_n \, d\mu}_{=0} \longrightarrow_{n\to+\infty} \int_{X\setminus E} g \, d\mu \equiv \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f \, d\mu.$$

Dall'ipotesi di sommabilità di f_1, la tesi segue.

Esercizio 2. *Sia Σ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$*

$$\Sigma := \{A \subset \mathbb{R} : \ [0, +\infty) \subset A \ \textit{oppure} \ A \subset (-\infty, 0)\}$$

e sia $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ definita $\mu(A) := \begin{cases} 1 & se\ A \cap [0, +\infty) \neq \emptyset \\ 0 & se\ A \subset (-\infty, 0) \end{cases}$.

1. *Dimostrare che Σ è una σ-algebra su $\mathbb{R}$ e μ una misura positiva*
2. *Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Σ-misurabile se e solo se è costante su $[0, +\infty)$.*
3. *Dimostrare che, se $f|_{[0,+\infty)} \equiv c$, allora* $\displaystyle\int_A f \mathrm{d}\mu = \begin{cases} c & se\ A \cap [0, +\infty) \neq \emptyset \\ 0 & se\ A \subset (-\infty, 0) \end{cases}$ *per ogni $A \in \Sigma$.*

Soluzione:

1. Chiaramente $\emptyset \in \Sigma$ e $\mathbb{R} \in \Sigma$ poiché $[0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.
   Chiusura per passaggio al complementare: Sia $A \in \Sigma$: se $A \supset [0, +\infty) \Longrightarrow A^c \subset (-\infty, 0)$, quindi $A^c \in \Sigma$. Se invece $A \subset (-\infty, 0) \Longrightarrow A^c \supset [0, +\infty)$.
   Chiusura rispetto all'unione numerabile di sottoinsiemi di Σ: Sia $A = \cup_n A_n, A_n \in \Sigma$. Se esiste $n_0 : A_{n_0} \supset [0, +\infty)$, allora $A \in \Sigma$. Se invece $A_n \subset (-\infty, 0) \, \forall n \Longrightarrow A \subset (-\infty, 0)$.
   Pertanto Σ è una σ-algebra.

   μ è una misura su Σ : Per definizione di μ, dato $\emptyset \in (-\infty, 0)$, $\mu(\emptyset) = 0$. Sia $\{A_n\}$ una collezione di sottoinsiemi disgiunti a due a due di Σ. Caso 1: $A_n \subset (-\infty, 0), \forall n$, nel qual

[1] Si ricorda che il funzionale di integrazione $\mathcal{I}_Y(h) = \displaystyle\int_Y h \, d\mu$ è ben definito solo sullo spazio quoziente delle funzioni misurabili rispetto alla relazione di equivalenza di uguaglianza quasi ovunque: $h \sim g$ se $h = g$ q.o. in X. Pertanto se h è definita su $Y \setminus E$ con $\mu(E) = 0$, il simbolo $\displaystyle\int_Y h \, d\mu$.

caso $\mu(\cup_n A_n) = 0 = \sum_n \mu(A_n)$. Caso 2: esiste un unico n' tale che $A_{n'} \supset [0, +\infty)$, mentre $\forall n \neq n'$ $A_n \subset (-\infty, 0)$. In questo caso $\mu(\cup_n A_n) = 1 = \mu(A_{n'}) + \sum_{n \neq n'} \mu(A_n) = 1 + 0$.
Si osservi che μ non è una misura sui Boreliani di $\mathbb{R}$: basti prendere gli intervalli disgiunti $(0, 2)$ e $(3, 4)$ in cui non vale l'additività di μ.

2. ($\Longleftarrow$) Supponiamo che f valga costantemente c su $[0, +\infty)$ e prendiamo un aperto $A \subset \mathbb{R}$. Se $c \notin A$, allora $f^{-1}(A) \subset (-\infty, 0)$ e dunque appartiene a Σ. Altrimenti, se $c \in A$, allora $f^{-1}(A) \supset [0, +\infty)$ necessariamente, pertanto $f^{-1}(A) \in \Sigma$. Quindi f è Σ-misurabile.
($\Longrightarrow$) Dato che f è misurabile, presi $x_0, \varepsilon > 0$ e definito $A = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ si ha necessariamente $f^{-1}(A) \supset [0, +\infty)$. Pertanto per ogni $x \geq 0$ si ha $f(x) \in A$, per ogni $\varepsilon > 0$, quindi $f(x) \equiv f(x_0)$, $\forall x \geq 0$.

3. Rispetto a μ, $f|_{[0,+\infty)} \equiv c$, μ-q.o. in $\mathbb{R}$. Dunque, il suo integrale su $A \in \Sigma$ coinciderà con quello della costante c, che per definizione vale
$$\int_A f \mathrm{d}\mu \int_A c \mathrm{d}\mu = c\mu(A) = \begin{cases} c & \text{se } A \cap [0, +\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty, 0) \end{cases} .$$

Esercizio 3. *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *tale che* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
Calcolare

1. $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x$*;*

2. $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)\cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right)\mathrm{d}x$*;*

3. $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

Soluzione:

1. $f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $x \neq 0$ e inoltre $\left|f(x)e^{-nx^2}\right| \leq f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, dunque si può applicare il teorema di convergenza dominata:
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} 0\mathrm{d}x = 0.$$

2. Utilizzando il cambio di variabile $y = x + n$ e la periodicità del coseno si ottiene
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)\cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n} - 2\pi\right)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right)\mathrm{d}y;$$
a questo punto, poiché $f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} f(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $\left|f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right)\right| \leq |f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$, allora si può applicare il teorema di convergenza dominata:
$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)\cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. Dal cambio di variabile $y = \dfrac{x}{n}$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) \arctan\left(x^2\right) \mathrm{d}x = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \arctan\left(n^2 y^2\right) \mathrm{d}y.$$

In quest'ultimo integrale si può applicare il teorema di convergenza dominata, perché $f(y) \arctan\left(n^2 y^2\right) \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{\pi}{2} f(y)$ per ogni $y \neq 0$ e $\left|f(y) \arctan\left(n^2 y^2\right)\right| \leq \frac{\pi}{2} f(y) \in L^1(\mathbb{R})$; dunque,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right) \arctan\left(x^2\right) \mathrm{d}x &= \left(\lim_{n \to +\infty} n\right) \left(\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \arctan\left(n^2 y^2\right) \mathrm{d}y\right) \\
&= \left(\lim_{n \to +\infty} n\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f(y) \arctan\left(n^2 y^2\right) \mathrm{d}y\right) \\
&= \left(\lim_{n \to +\infty} n\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2} f(y) \mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{\pi}{2} \lim_{n \to +\infty} n \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. *Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura con $\mu(X) < +\infty$ e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ-misurabili, non-negative, tali che $f_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ puntualmente e che soddisfino la proprietà*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, M_\varepsilon \text{ tale che } \int_{\{x \in X:\, f_n(x) > M_\varepsilon\}} f_n \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon.$$

Dimostrare, utilizzando la successione $f_n^M(x) = \min\{f_n(x), M\}$, che $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.

Soluzione: Ad ogni $M > 0$ fissato, $f_n^M \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ puntualmente, inoltre per costruzione $0 \leq f_n^M \leq M$, con $\int_X M \mathrm{d}\mu = M\mu(X) < +\infty$, dunque dal teorema di convergenza dominata $\int_X f_n^M \mathrm{d}\mu \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.
Prendiamo ora $\varepsilon, M_\varepsilon$ che verifichino la proprietà precedente e notiamo che $f_n = f_n^M + (f_n - M)\chi_{\{x \in X: f_n(x) \geq M\}}$: dunque, otteniamo

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n^M \mathrm{d}\mu + \lim_{n \to +\infty} \int_{\{x \in X: f_n(x) \geq M\}} (f_n - M) \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n \to +\infty} \int_{\{x \in X: f_n(x) \geq M\}} (f_n - M) \mathrm{d}\mu \\
&\leq \lim_{n \to +\infty} \int_{\{x \in X: f_n(x) \geq M\}} f_n \mathrm{d}\mu \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Essendo ε arbitrario, concludiamo che il limite è 0.