Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2020 – 2021
J.E. Massetti

Esercitazione 3 del 27 Ottobre 2020

Esercizio 1. *Sia $r > 0$ fissato, μ una misura Boreliana su $\mathbb{R}$ e finita sui compatti.*

1. *Dimostrare che, data una successione $x_n \to x$, $n \to +\infty$ si ha*

$$\mu((x-r, x+r)) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mu((x_n - r, x_n + r)),$$

ossia che $f(x) := \mu((x-r, x+r))$ è inferiormente semi-continua.

2. *Dimostrare, utilizzando la misura di Dirac $\mu(A) = \begin{cases} 1 & se\ 0 \in A \\ 0 & se\ 0 \notin A \end{cases}$, che la disuguaglianza precedente potrebbe essere stretta.*

Soluzione: Possiamo esprimere la semicontinuità inferiore equivalentemente come segue: per ogni successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$ si ha $f(x) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.
Data una successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x$, definiamo $g_n(x) := \chi_{(x_n - r, x_n + r)}$. Il suo limite puntuale, e in particolare il limite inferiore, è $g(x) = \chi_{(x-r,x+r)}$, dunque dal Lemma di Fatou otteniamo

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(x-r,x+r)} \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} g_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to+\infty} \mu((x_n - r, x_n + r)) = \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Prendendo $\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \in A \\ 0 & \text{se } 0 \notin A \end{cases}$ e $x_n = r - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\nearrow} r$, si ottiene
$f(x_n) = \mu\left(\left(-\dfrac{1}{n}, 2r - \dfrac{1}{n}\right)\right) = 1$ ma $f(r) = \mu((0, 2r)) = 0$.

Esercizio 2. *Al variare di $a \geq 0$ calcolare*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1 + x^2} \, dx$$

Per prima cosa eseguo il cambio di variabile $y = nx$ e ottengo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{na}^\infty \frac{y e^{-y^2}}{1 + (\frac{y}{n})^2} \, dy = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{y e^{-y^2}}{1 + (\frac{y}{n})^2} \chi_{(na,+\infty)}(y) \, dy$$

Calcoliamo il limite puntuale della nostra funzione $f_n := \dfrac{y e^{-y^2}}{1 + (\frac{y}{n})^2} \chi_{(na,+\infty)}(y)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \begin{cases} y e^{-y^2} & \text{se} \quad a = 0 \\ 0 & \text{se} \quad a \neq 0 \end{cases}$$

Inoltre $|f_n| \leq y e^{-y^2} \in L^1(0, \infty)$ quindi possiamo utilizzare il teorema di convergenza equidominata e concludere che:

- se $a = 0$ allora abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n\,dy = \int_0^\infty ye^{-y^2}\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_0^k ye^{-y^2}\,dy = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-y^2}\right)\Big|_0^k dy =$ $= \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-k^2}-1) = \frac{1}{2}$

  Dove, per utilizzare il fatto che integrale di Riemann e Lebesgue coincidono sui compatti, abbiamo considerato $[0,\infty] = \bigcup_{k=1}^{+\infty}[0,k]$ e usato il teorema di monotonia della misura per una famiglia monotona crescente di misurabili.
- se $a \neq 0$ allora $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n\,dy = \int_0^\infty 0\,dy = 0$

Esercizio 3. *Utilizzando opportune serie di funzioni, dimostrare le uguaglianze*

$$\int_0^1 \frac{\log\frac{1}{x}}{1-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \qquad\qquad \int_0^1 \frac{\log\frac{1}{x}}{1+x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.$$

Soluzione: Sia $f_n(x) = x^n\log\frac{1}{x}$. Allora, dalla somma della serie geometrica otteniamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \log\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{\log\frac{1}{x}}{1-x}$. Inoltre, essendo le f_n a termini positivi per $x \in (0,1)$, si può applicare il teorema della convergenza monotona alla successione delle somme parziali $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_n(x)$ e scambiare limite e serie ottenendo così $\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$. Infine, quest'ultimo integrale può essere calcolato per parti:

$$\int_0^1 x^n\log\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\log\frac{1}{x}\right]_0^1 - \int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^n}{n+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^n}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Per ottenere la seconda uguaglianza consideriamo invece la serie di $(-1)^n f_n(x)$ e proviamo a scambiare limite e integrale per la successione delle somme parziali $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k(x)$. Applicando la stima

$$|T_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n}|f_k(x)| = \sum_{k=0}^{+\infty}f_k(x) = \frac{\log\frac{1}{x}}{1-x}$$

abbiamo trovato una maggiorante per T_n che, per quanto visto in precedenza, è integrabile. Dunque per il teorema di convergenza dominata si può scambiare limite e integrale per T_n, cioè scambiare serie e integrale di $(-1)^n f_n$:

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\log\frac{1}{x}}{1+x}\mathrm{d}x &= \int_0^1\log\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^n f_n(x)\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n\log\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Esercizio 4. *Sia* (X,Σ,μ) *uno spazio misura,* $f : X \to \mathbb{R}$ μ*-misurabile e*

$$A_n := \{x \in X : n \le |f(x)| < n+1\}.$$

Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. *f è essenzialmente limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per μ-q.o. $x \in X$;*

2. *$\mu(A_n) > 0$ solo per finiti n;*

3. *Se $g \in L^1(\mu)$ allora anche $fg \in L^1(\mu)$.*

Dimostrare che, assumendo inoltre $\mu(X) < +\infty$, $f \in L^1(\mu)$ se e solo se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n) < +\infty$.

Soluzione: (1)⇒(2) Sia f essenzialmente limitata e M come sopra. Allora per $n \geq M$ abbiamo

$$0 \leq \mu(A_n) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq M\}) = 0,$$

e dunque $\mu(A_n) > 0$ al più per $n = 1, \ldots, M$.
(2)⇒(1) Viceversa, se $\mu(A_n) > 0$ solo per un numero finito, allora $\mu(A_n) = 0$ per $n \geq N_0$, dunque avremo

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \leq N_0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=N_0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=N_0}^{+\infty} \mu(A_n) = 0,$$

cioè $|f(x)| \leq N_0$ per q.o. $x \in X$. (È opportuno notare che quell'unione è disgiunta)
(1)⇒(3) Se f è essenzialmente limitata e $g \in L^1(\mu)$ allora

$$\int_X |fg| \mathrm{d}\mu = \int_{\{x \in X : |f(x)| \leq M\}} |fg| \mathrm{d}\mu \leq M \int_x |g| \mathrm{d}\mu < +\infty$$

e dunque $fg \in L^1(\mu)$.
(3)⇒(1) Viceversa, se f non è essenzialmente limitata, allora esiste una successione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $n_k \geq k$ e $\mu(A_{n_k}) > 0$. Infatti, una volta che ho dimostrato l'equivalenza tra (1) e (2), se per dimostrare (3) nego (1) allora nego anche (2) e questo è quello che ho fatto.
Prendiamo ora una funzione del tipo $g = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \chi_{A_{n_k}}$ e mostriamo che per una scelta opportuna di c_k avremo $g \in L^1(\mu)$ e $fg \notin L^1(\mu)$: per costruzione abbiamo $\displaystyle\int_X |g| \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \mu(A_{n_k})$, mentre

$$\int_X |fg| \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \int_{A_{n_k}} |f| \geq \sum_{k=0}^{+\infty} n_k c_k \mu(A_{n_k}) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} k c_k \mu(A_{n_k}).$$

Sarà dunque sufficiente prendere c_k affinché la prima serie converga ma la seconda no, cioè ad esempio $c_k = \dfrac{1}{k^2 \mu(A_{n_k})}$. Infatti, la prima è la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_k k^{-2}$ mentre la seconda è una serie armonica.

Infine, per l'ultima equivalenza:
Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n) < +\infty$ allora

$$\int_X |f| \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} (n+1) d\mu(A_n) = \mu(X) + \sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n) < +\infty$$

e quindi $f \in L^1$
D'altra parte, se $f \in L^1$,

$$+\infty > \int_X |f| \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} n d\mu(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mu(A_n)$$