Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2020 – 2021
J.E. Massetti

ESERCITAZIONE 5 DEL 24 NOVEMBRE 2020

Esercizio 1 (Disuguaglianza di Young). *Mostrare che* $\forall a, b \geq 0$ *e* $1 < p, q < +\infty$ *tali che* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ *vale*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{0.1}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$.

Se $a = 0$ o $b = 0$ è banalmente vero. Siano allora $a, b \neq 0$ e consideriamo la funzione $f(x) = e^x$, strettamente convessa su $\mathbb{R}$. Dalla stretta convessità segue allora

$$ab = e^{\log ab} = e^{p^{-1}\log a^p + q^{-1}\log a^q} \leq \frac{1}{p}e^{\log a^p} + \frac{1}{q}e^{\log b^q},$$

da cui (0.1). Chiaramente vale l'uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$, da cui la tesi.

Ese assegnato: dedurre la disuguaglianza di Young dal seguente risultato (di Young, integrale).

Sia $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *continua e strettamente crescente e tale che fissa l'origine, i.e.* $\varphi(0) = 0$. *Sia allora* $\psi = \varphi^{-1}$ *(anch'essa continua e strett. crescente). Allora* $\forall a, b \geq 0$ *si ha*

$$ab \leq \int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_0^b \psi(y)\,dy$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\varphi(a) = b$.

Esercizio 2 (Uguaglianza nella disuguaglianza di Minkowski). *Siano* $1 < p, q < +\infty$ *tali che* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *Siano* $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$ *con* E *spazio* $\mu-$*misurabile,* $f, g : E \to [-\infty, +\infty]$. *Mostrare che*

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q \iff \exists\, C_1, C_2 \text{ non entrambe nulle tali che } C_1|f|^p = C_2|g|^q \text{ per q.o. } x \in E$$

($\Leftarrow$) Sia $C_1 = 0$ e $C_2 \neq 0$, allora $C_2|g|^q = 0$ per q.o. $x \in E$ da cui $\|g\|_q = 0$ q.o. e quindi

$$\|fg\|_1 = \int_E |fg|d\mu = 0 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Si ragiona analogamente se $C_2 = 0$ e $C_1 \neq 0$.

Siano allora $C_1, C_2 \neq 0$. Per ipotesi, abbiamo

$$C_2\|g\|_q^q = C_2 \int_E |g|^q\,d\mu = C_1 \int_E |f|^p\,d\mu = C_1\,\|f\|_p^p\,,$$

da cui

$$\|g\|_q = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}}\,. \tag{0.2}$$

Inoltre,

$$\|f\|_p \|g\|_q \overset{(0.2)}{=} \|f\|_p \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p^p, \tag{0.3}$$

poiché $1 + p/q = p$ per ipotesi.
Per ipotesi, possiamo anche scrivere la seguente catena di uguaglianze a partire da $|fg|$:

$$C_1|fg|^q = C_2|f|^q|g|^q = |f|^q C_1|f|^p = C_1|f|^{pq}, \tag{0.4}$$

da cui

$$|fg|^q = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{q}} |f|^p \tag{0.5}$$

poiché $p + q = pq$. Infine da (0.3) e (0.5) abbiamo,

$$\int_E |fg|\, d\mu = \int_E \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{q}} |f|^p\, d\mu = \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p^p = \|f\|_p \|g\|_q.$$

hence the thesis.

($\Rightarrow$) Senza perdita di generalità possiamo supporre $f(x), g(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$, altrimenti se fosse $f = 0$ o $g = 0$ q.o. $x \in E$ l'uguaglianza sarebbe verificata banalmente con $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$ o $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$. Se fossero entrambe nulle, l'uguaglianza sarebbe verificata per ogni C_1, C_2.
Siano

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \qquad b = \frac{|g|}{\|g\|_q}, \tag{0.6}$$

dalla disuguaglianza di Young abbiamo le seguenti equivalenze

$$ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \Leftrightarrow \quad a^p = b^q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|f|}{\|f\|_p^p} = \frac{|g|}{\|g\|_q^q}. \tag{0.7}$$

Mostriamo allora la prima uguaglianza ed avremo la tesi. Sempre per la disuguaglianza di Young, abbiamo che

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq p^{-1} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + q^{-1} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}, \tag{0.8}$$

e, passando all'integrazione, per monotonia abbiamo

$$\frac{\int_E |f(x)g(x)|\, d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq p^{-1} \frac{\int_E |f(x)|^p\, d\mu}{\|f\|_p^p} + q^{-1} \frac{\int_E |g(x)|^q\, d\mu}{\|g\|_q^q}. \tag{0.9}$$

Per ipotesi sulla norma $\|fg\|_1$ e il fatto che p, q sono coniugati , i due membri della disequazione sono entrambi uguali a 1 e pertanto si ha uguaglianza; poiché (0.8) vale, dal noto teorema sulla nullità dell'integrale si deduce allora che (0.8) è in realtà un'uguaglianza q.o.. Quindi la tesi.

Esercizio 3 (Spazi ℓ_p). *Siano ℓ_p definiti da:*

$$\ell_p := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} |\ \|x\|_p^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty\}$$

$$\ell_\infty := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C} | \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$$

Dimostrare che:

1. *Se $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ allora $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_p$, e in particolare $\ell_p \subset \ell_q$.*
2. *ℓ_p è separabile per ogni $1 \leq p < +\infty$ mentre ℓ_∞ non lo è.*
3. *Dimostrare che lo spazio delle successioni infinitesime $c_0 \subset \ell_\infty$ definito da*

   $$c_0 := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0\}$$

   è chiuso in ℓ_∞ e separabile.

1. Se $1 \leq p \leq q < \infty$: Sia $x \in \ell_p$. $\|x\|_p^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty$ quindi per il criterio necessario alla convergenza delle serie, $|x_n|^p \underset{n\to\infty}{\to} 0$ e quindi $|x_n| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. In particolare, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n| < 1$ per ogni $n \geq n_0$

$$\|x\|_q^q = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^q = \sum_{n=1}^{n_0-1} |x_n|^q + \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^q \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{n_0-1} |x_n|^q + \sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + c < \infty$$

Dove in $(*)$ abbiamo usato che $|x_n|^q \leq |x_n|^p$ per $p \leq q$ poiché $|x_n| < 1$
Se $1 \leq p \leq q = \infty$: Sia $x \in \ell_p$. $\|x\|_p^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < +\infty$ quindi come prima abbiamo che $|x_n| \to 0$ definitivamente. Pertanto $\|x\|_\infty < \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0}|, 1\} < \infty$
E dunque abbiamo dimostrato che se $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ allora $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_p$, e in particolare $\ell_p \subset \ell_q$.
Osservazione Entrambe le inclusioni sono strette.
Se $1 \leq p < q < \infty$ allora $\ell_p \subsetneq \ell_q$:
Basta prendere $x = \{x_k\} := \{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}\}$. Allora $\|x\|_q = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{q}{p}} < \infty$ perché $\frac{q}{p} > 1$. Invece, $\|x\|_p = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} = \infty$
Se $q = \infty$ e $1 \leq p < q$, basta osservare che ogni successione costante sta in ℓ_∞ ma in nessun ℓ_p qualunque sia p
Mostriamo ora che per $1 \leq p \leq q$ si ha $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ per ogni $x \in \ell_p$.
A) Se $q = \infty$, banalmente $\|x\|_\infty{}^p = (\max_n |x_n|)^p \leq \sum_n |x_n|^p = \|x\|_p^p$.
B) Se, invece, $1 \leq p \leq q < \infty$ abbiamo che

$$\|x\|_q^q = \sum_n |x_n|^q = \sum_n |x_n|^{q-p}|x_n|^p \leq \|x\|_\infty{}^{q-p} \|x\|_p^p \overset{(A)}{\leq} \|x\|_p^{q-p} \|x\|_p^p = \|x\|_p^q$$

2. Per definizione di separabilità, per mostrare che ℓ_p con $p < \infty$ è separabile, devo cercare un sottoinsieme di ℓ_p numerabile e denso in ℓ_p. Consideriamo l'*Estensione complessa di* $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q} \oplus i\mathbb{Q}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo il seguente sottoinsieme di ℓ_p:

$$A_n := \big\{x \in \ell_p : x_j \in \mathbb{Q}(i)\,\forall\, j \leq n, x_j = 0\,\forall\, j \geq n+1\big\}$$

Ovviamente, $A_n \approx \underbrace{\mathbb{Q}^2 \times \ldots \times \mathbb{Q}^2}_{n \text{ volte}} \approx \mathbb{Q}^{2n}$ pertanto A_n è numerabile. Consideriamo allora $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{(x_1, \ldots, x_n, 0\ldots) : x_j \in \mathbb{Q}(i), 1 \leq j \leq n\big\}$.
A è numerabile in quanto unione numerabile di insiemi numerabili. Mostriamo quindi la densità e innanzitutto mostriamo che $\mathbb{Q}(i)$ è denso in $\mathbb{C}$:
Sia $\varepsilon > 0$. Preso $z = x + iy \in \mathbb{C}$ trovo $r = p + iq \in \mathbb{Q}(i)$ con $|p - x| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ e $|q - y| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ da cui $|z - r| = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2} \leq \varepsilon$.
Sia ora $\bar{x} \in \ell_p(\mathbb{C})$ ossia tale che $\sum_n \bar{x}_n^p < \infty$, il che necessariamente implica che per ogni $\varepsilon > 0\, \exists\, n_0 > 0$ tale che $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \bar{x}_n^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$. Inoltre, per $n < n_0$, sia $z \in A_{n_0}$ tale che per ogni $n < n_0$ vale che $\begin{cases} |\bar{x}_n - z_n| < \dfrac{\varepsilon}{(2n_0)^{1/p}} \\ z_n = 0\,\forall\, n \geq n_0 + 1 \end{cases}$. Ovviamente $z \in \ell_p$.

$$\|\bar{x} - z\|_p^p = \sum_{n=1}^{n_0} |\bar{x}_n - z_n|^p + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\bar{x}_n|^p \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon^p}{2n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

Il che implica la tesi.
Proviamo ora che ℓ_∞ non è separabile. Useremo il seguente
Criterio di (non) separabilità: *Se* (X,d) *è uno spazio metrico ed esiste* E *tale che* $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} \mathbb{N}$ *e tale che esiste* $a > 0$ *per cui* $d(x,y) \geq a$ *per ogni* $x, y \in E$ *con* $x \neq y$, *allora* X *non è separabile.*
Ese per voi: dimostrare il criterio.

Definiamo $E := \left\{\tilde{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} : x_k \in \{0,1,\ldots,9\} \forall\, k \in \mathbb{N}\right\}$. Sia $\psi : E \to [0,1]$ tale che $\psi(\tilde{x}) := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} x_k = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots$. ψ è suriettiva su $[0,1]$ e Card$E \geq$Card$([0,1]) \gneq$Card$\mathbb{N}$.

Inoltre, $x \in E$ e ovviamente $\|x\|_\infty < \infty$ e presi $x, y \in E$ con $x \neq y$, esiste j tc $|x_j - y_j| \geq 1$ almeno , ma allora $\|x-y\|_\infty \geq 1$ e ciò conclude la dimostrazione della non separabilità di ℓ_∞.

3. Iniziamo con la chiusura. Sia $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di c_0 tali che $x(j) \to x \in \ell_\infty$. Mostriamo che $x \in c_0$. Per l'ipotesi di convergenza, sicuramente abbiamo che $\|x(j) - x\|_\infty < \varepsilon/2$ definitivamente in j, da cui esiste $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall j \geq j_0$

$$x_n(j) - \varepsilon/2 \leq x_n \leq \varepsilon/2 + x_n(j) \quad \forall n. \tag{0.10}$$

Voglio mostrare che dato ε, esiste n_0 tale che $\forall n \geq n_0$ $|x_n| < \varepsilon$.
Sia ora $|x_n| = |x_n + x_n(j) - x_n(j)|$ per $j \geq j_0$. Sicuramente $|x_n| \leq |x_n - x_n(j)| + |x_n(j)|$ e poiché per ogni j, $x(j) \in c_0$, allora definitivamente in n $|x_n(j)| < \varepsilon/2$, quindi la tesi. Si osservi che $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, essendo chiuso in $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, è di Banach anch'esso.

Per quanto riguarda la separabilità, si procede similmente a quanto fatto per gli ℓ_p. Sia $a \in c_0$ e sia $A = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(z_1, \ldots, z_n, 0 \ldots) : z_j \in \mathbb{Q}(i), 1 \leq j \leq n\right\} \subset c_0$, numerabile. Poiché $a \in c_0$, esiste n_0 tale che $\displaystyle\sup_{n \geq n_0+1} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre, per densità dei razionali, per ogni $n \leq n_0$, esiste $z \in A$ tale che $|z_i - a_n| < \varepsilon$ per ogni $1 \leq i \leq n_0$. Pertanto $\displaystyle\sup_n |a_n - z_n| < \varepsilon$.