Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2020 – 2021
J.E. Massetti

Esercitazione 6 del 18 Dicembre 2020

Esercizio 1 (Ortogonale di ortogonale)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e M un suo sottospazio. Si dimostri che*

1. *se M è chiuso, allora $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$*
2. *se M non è chiuso, allora $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{M}$.*

1. Iniziamo col provare che $M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Infatti, sia $x \in M$, allora $x \perp M^{\perp}$, quindi $x \in M^{\perp\perp}$. Proviamo ora che $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} \subset M$. Sia $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Innanzitutto, dalla chiusura di M, segue che $H = M \oplus M^{\perp}$ e quindi $x = x_p + x_q$ con x_p e x_q le sue proiezioni rispettive su M e $M^{\perp}$. Sia allora $x_q = x - x_p \in M^{\perp}$. Poiché $x_p \in M \subset \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$, e quest'ultimo è un sottospazio, allora anche $x_q \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$. Da questo segue allora che $x_q \in M^{\perp}$ soddisfa anche $x_q \perp M^{\perp}$, quindi $x_q = 0$ necessariamente, da cui $x = x_p$, quindi $x \in M$.

2. Sia M non chiuso e consideriamo $\overline{M}$ per il quale vale che $(\overline{M}^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$. Vogliamo provare che $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$, da cui seguirà la tesi. Se $x \perp \overline{M}$, allora $x \perp M$ (poiché $M \subset \overline{M}$, quindi $x \in M^{\perp}$ da cui $\overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp}$.
Viceversa, sia $x \in M^{\perp}$. Prendiamo $y \in \overline{M}$ e $(y_i)_{i\in N}$, con $y_i \in M$, tale che $y_i \to y$. Poiché $x \in M^{\perp}$, si ha $(x, y_i) = 0$ per ogni i e, per continuità del prodotto interno, anche $(x, y) = 0$. Questo ovviamente vale per ogni $y \in \overline{M}$, da cui segue che $x \in \overline{M}^{\perp}$. Quindi $M^{\perp} \subset \overline{M}^{\perp}$, da cui segue che $(M^{\perp})^{\perp} = \overline{M}$.

Osservazione. Possiamo utilizzare il punto 2 per dimostrare la densità di un sottospazio in H. In effetti da 2 deduciamo che un sottospazio M è denso in H se e solo se $M^{\perp} = \{0\}$.

Esercizio 2 (Conseguenza di Riesz)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert. Mostrare che dal Teorema di Riesz è possibile identificare H e il suo duale $H^* := \{\varphi : H \to \mathbb{C}$ lineari e continui$\}$ tramite un isomorfismo antilineare.*

Definiamo l'applicazione $\Lambda : H \to H^*$ che agisce come

$$\Lambda : H \to H^*, \quad y \mapsto \Lambda y := (\cdot, y),$$

ove, per ogni y fissato, con $(\cdot, y)$ intendiamo il funzionale lineare $H \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x, y)$, dove $(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_H$ è il prodotto interno definito su H. Dato $\varphi \in H^*$, per il Teorema di Riesz esiste ed è unico $y \in H$ tale che $\varphi(x) = (x, y)$ per ogni $x \in H$. Grazie a questo teorema possiamo affermare immediatamente che

1. Λ è suriettivo: per ogni $\varphi \in H^*$ esiste $y \in H$ tale che $\varphi = \Lambda y$;
2. Λ è iniettivo, e questo segue banalmente dall'unicità di y garantita da Riesz oppure osservando che

$$\Lambda y = \Lambda y' \iff (x, y) = (x, y') \quad \forall x \in H \iff (x, y - y') = 0 \quad \forall x \in H$$
$$\Rightarrow y - y' \in H^{\perp} = \{0\} \Rightarrow y = y'.$$

3. Definendo su H^* il seguente prodotto interno $\varphi^*, \psi^* \in H^*$

$$(\varphi^*, \psi^*)_{H^*} := (\Lambda^{-1}\varphi^*, \Lambda^{-1}\psi^*)_H,$$

osserviamo immediatamente che

$$(\Lambda y, \Lambda y')_{H^*} = (\Lambda^{-1}(\Lambda y), \Lambda^{-1}(\Lambda y'))_H = (y, y')_H.$$

Pertanto, Λ preserva i prodotti interni.

Dai punti precedenti segue allora che Λ è un isomorfismo[1] tra H e il suo duale H^*, antilineare (segue dall'antilinearità del prodotto scalare rispetto alla seconda entrata). A latere, è semplice verificare che Λ è un'isometria $\|\Lambda y\|_{\text{op}} = \|y\|_H \ ,\forall y \in H$.

Esercizio 3. *Sia H Hilbert e $\varphi : H \to \mathbb{C}$ funzionale lineare continuo. Sia $M = \{x \in H : \varphi = 0\}$. Allora* $\dim M^\perp \leq 1$.

Se $M \equiv H$ allora $M^\perp = H^\perp = \{0\}$ e quindi $\dim M^\perp = 0$.
Sia ora $M \neq H$. Ovviamente M è sottospazio chiuso (poiché controimmagine di 0 tramite funzione continua) e proprio. Assumiamo per assurdo che $\dim M^\perp > 1$. Posso allora prendere $z_1, z_2 \in M^\perp$ linearmente indipendenti e tali che $\|z_i\| = 1$, $i = 1, 2$.
Sia ora $x \in H$ e definiamo $y_i = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(z_i)} z_i$, $i = 1, 2$.
Osserviamo che $\varphi(z_i) \neq 0$ perché $z_i \in M^\perp$ quindi x è ben definito, inoltre per linearità di φ si ha

$$\varphi(y_i) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z_i)}\varphi(z_i) = 0,$$

pertanto $y_i \in M$. Poiché $z_i \in M^\perp$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = (y_i, z_i) \Leftrightarrow 0 &= (x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z_i)} z_i, z_i) \\ &= (x, z_i) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z_i)}(z_i, z_i) \\ &= (x, z_i) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(z_i)}. \end{aligned}$$

Dalla precedente uguaglianza deduciamo allora che

$$\varphi(x) = \varphi(z_i)(x, z_i) = (x, \overline{\varphi(z_i)} z_i) \quad i = 1, 2\,, \forall x \in H. \tag{0.1}$$

Dal teorema di Riesz sappiamo che esiste ed è unico $y \in H$ tale che $\varphi(x) = (x, y) \, \forall \, x \in H$, ma allora da (0.1) segue necessariamente che $(x, \overline{\varphi(z_1)} z_1) = (x, y) = (x, \overline{\varphi(z_2)} z_2)$ da cui $\overline{\varphi(z_1)} z_1 = \overline{\varphi(z_2)} z_2$, in contraddizione con l'indipendenza lineare di z_1 e z_2. Quindi $\dim M^\perp = 1$.

Esercizio assegnato. Se H è uno spazio unitario allora la norma è strettamente convessa; ossia, date $x, y \in H$ con $x \neq y$ e $\|x\| = \|y\| = d$ allora $\|\dfrac{x+y}{2}\| < d$ *Hint*: usate la regola del parallelogramma.
Soluzione: Dalla regola del parallelogramma in uno spazio unitario, segue che

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 2\left(\left\|\frac{x}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y}{2}\right\|^2\right)$$

da cui

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = d^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 \lneq d^2,$$

osservando che la disuguaglianza è necessariamente stretta, poiché altrimenti dovremmo avere $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Segue allora la tesi.

[1] In alcuni testi la bijezione $\Lambda^{-1} : H^* \to H$ che ad ogni funzionale $x^* \in H^*$ associa l'unico elemento $x \in H$ tale che $x^*(y) = (y, x) \, \forall y \in H$ è chiamata *isometria canonica*.

Esercizio 4. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \to H$ un operatore lineare e continuo.*

1. *Mostrare che $\forall\, y \in H$ esiste $T^* y \in H$ tale che*
$$(Tx, y) = (x, T^* y) \quad \forall\, x \in H. \tag{0.2}$$
2. *Mostrare che la relazione (0.2) permette di definire un operatore T^* lineare e continuo $T^* : H \to H$, $y \mapsto T^* y$ (detto* aggiunto *di T) e tale che $\|T^*\|_{op} \leq \|T\|_{op}$.*
3. *Mostrare che $(T^*)^* = T$ e quindi che $\|T^*\|_{op} = \|T\|_{op}$.*

1. Dato $y \in H$, sia
$$\begin{aligned} G_y : H &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto (Tx, y) \end{aligned}$$
G_y è funzionale lineare e continuo. Infatti,
$$G_y(\alpha x_1 + \beta x_2) = (T(\alpha x_1 + \beta x_2), y) = \alpha (Tx_1, y) + \beta (Tx_2, y) = \alpha G_y(x_1) + \beta G_y(x_2).$$
Inoltre dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e dalla continuità di T, dato $x \in H$, segue che
$$|G_y x| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\|_{\text{op}} \|x\| \|y\| < \text{const.} \|x\|.$$
Passando al sup sugli $\|x\| = 1$, segue la limitatezza di $\|G_y\|_{\text{op}}$, quindi la continuità. Dal Teorema di Riesz, poiché $G_y \in H^*$ esiste ed è unico $T^* y \in H$ (con la notazione di prima $T^* y = \Lambda^{-1}(G_y)$) tale che $G_y(x) = (x, T^* y)\, \forall\, x \in H$, dalla definizione di G_y segue allora (0.2).
2. Sia $x \in H$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $y_1, y_2 \in H$. La linearità segue dal punto precedente e dall'antilinearità del prodotto scalare rispetto la seconda entrata, infatti
$$(x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) = (Tx, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(Tx, y_1) + \overline{\beta}(Tx, y_2) = (x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2),$$
da cui abbiamo $(x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha T^* y_1 - \beta T^* y_2) = 0$ per ogni $x \in H$. Pertanto $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2$ necessariamente.
Per quanto riguarda la continuità, sia
$$\begin{aligned} \Lambda_{T^* y} : &H \to \mathbb{C} \\ &x \mapsto (x, T^* y) \end{aligned}$$
il funzionale indotto dall'isomorfismo canonico Λ dato dal teorema di Riesz (si ricordi Esercizio 2), che sappiamo soddisfare a $\|\Lambda_{T^* y}\|_{\text{op}} = \|T^* y\|$. Per $x \in H$ abbiamo
$$|\Lambda_{T^* y}(x)| = |(x, T^* y)| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\|_{\text{op}} \|x\| \|y\|.$$
Unendo le due relazioni si ha
$$\|T^* y\| = \|\Lambda_{T^* y}\|_{\text{op}} \leq \|T\|_{\text{op}} \|y\|$$
quindi, passanto al sup
$$\|T^*\|_{\text{op}} = \sup_{\|y\|=1} \|T^* y\| \leq \|T\|_{\text{op}}.$$
3. Sia $T^* : H \to H$ operatore lineare e continuo. Per i due punti precedenti esiste $(T^*)^*$ tale che $(T^* x, y) = (x, (T^*)^* y)$ per ogni $x \in H$. D'altra parte, $(T^* x, y) = \overline{(y, T^* x)} = \overline{(Ty, x)} = (x, Ty)$ quindi $(x, Ty) = (x, (T^*)^* y)$ per ogni $x \in H$ e quindi $T = (T^*)^*$. Infine
$$\|T\|_{\text{op}} = \|(T^*)^*\|_{\text{op}} \overset{2}{\leq} \|T^*\|_{\text{op}} \overset{2}{\leq} \|T\|_{\text{op}} \Rightarrow \|T\|_{\text{op}} = \|T^*\|_{\text{op}}.$$

Esercizio 5. *Sia T l'operatore definito come segue*
$$\begin{aligned} T : L^2((a,b)) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto T(f) := \int_a^b f(t)\, dt. \end{aligned}$$

1. *Mostrare che T è lineare e continuo e calcolare $\|T\|_{\text{op}}$.*

2. *Dal teorema di Riesz sappiamo che esiste $g \in L^2$ tale che $Tg = (f, g) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ per ogni $f \in L^2(a, b)$. Trovare g e mostrare che $\|g\|_2 = \|T\|_{\text{op}}$.*

1. Innanzitutto, T è ben definito. Infatti, essendo $\mu((a, b)) < \infty$ dalla disuguaglianza di Hölder segue che $L_2((a, b)) \subset L_1((a, b))$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|\,d\mu \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2\|1\|_2 = \|f\|_2\sqrt{b-a} < \infty.$$

   La linearità di T segue dalla linearità dell'integrale. Essendo T lineare, possiamo mostrarne la continuità equivalentemente tramite la sua limitatezza: osserviamo che, data $f \in L^2((a, b))$ abbiamo

$$|T(f)| = |\int_a^b f(t)\,dt| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt \leq \sqrt{b-1}\,\|f\|_2\,.$$

   Passando al sup abbiamo allora

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\|f\|_2 \neq 0} \frac{|T(f)|}{\|f\|_2} \leq \sup_{\|f\|_2 \neq 0} \frac{\|f\|_2\sqrt{b-a}}{\|f\|_2} = \sqrt{b-a}. \tag{0.3}$$

   Sia ora $f \equiv \frac{1}{\sqrt{b-a}}$, che soddisfa $\|f\|_2 = 1$, allora

$$\sqrt{b-a} = |T(f)| = |\int_a^b \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,dt| \leq \|f\|_2\,\|T\|_{\text{op}} = \|T\|_{\text{op}}\,,$$

   da (0.3) segue allora $\|T\|_{\text{op}} = \sqrt{b-a}$.

2. Dal teorema di Riesz esiste ed è unica $g \in L^2((a, b))$ tale che

$$Tf = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad \forall\, f \in L^2((a, b)).$$

   E' evidente che l'uguaglianza è banalmente verificata per ogni $f \in L^2(a, b)$ scegliendo $g(x) = 1$ su (a, b), e, grazie all'unicità garantita dal teorema di Riesz, possiamo concludere che sia proprio $g(x) = 1$ a rappresentare T.
   Infine, $\|g\|_2 = \|1\|_2 = \sqrt{b-a} = \|T\|$.