Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2020 – 2021
J.E. Massetti

Esercitazione 7 del 22 Dicembre 2020

Esercizio 1. *Stabilire per quali valori del parametro reale positivo α la funzione $f(x,y) = \arctan(x^2y)$ risulta Lebesgue-integrabile in*

$$E_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : 0 < y < \frac{1}{1+|x|^\alpha}\right\}.$$

La positività di f in E_α ed il teorema di Tonelli consentono di stabilire le uguaglianze seguenti

$$\begin{aligned}\int_{E_\alpha} f(x,y)\,dxdy &= 2\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{1+x^\alpha}} \arctan(x^2y)\,dy\right)dx = \int_0^{+\infty}\frac{2}{x^2}\left(\int_0^{\frac{x^2}{1+x^\alpha}}\arctan(u)\,du\right)dx \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{2}{x^2}\left[u\arctan(u) - \frac{1}{2}\log(1+u^2)\right]_{u=0}^{u=x^2/1+x^\alpha} dx \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{2}{x^2}\left[\frac{x^2}{1+x^\alpha}\arctan\left(\frac{x^2}{1+x^\alpha}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{x^2}{1+x^\alpha}\right)^2\right)\right]dx.\end{aligned}$$

Indichiamo ora con $g_\alpha(x)$ la funzione integranda che appare a membro destro dell'ultima uguaglianza. Quando $x \to 0$, il termine $t = \dfrac{x^2}{1+x^\alpha}$ è un infinitesimo e, dalle relazioni asintotiche[1] $\arctan t \sim t$ e $\log(1+t) \sim t$ per $t \to 0$, è immediato vedere che

$$g_\alpha(x) = \frac{2}{x^2}\left[\left(\frac{x^2}{1+x^\alpha}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1+x^\alpha}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{1+x^\alpha}\right)^2\right)\right]$$

da cui $g_\alpha(x) \sim \dfrac{x^2}{(1+x^\alpha)^2}$ che è integrabile in un intorno di 0, per ogni $\alpha > 0$. Rimane pertanto da discutere in dettaglio il comportamento di $g_\alpha(x)$ per $x \to \infty$ a seconda del valore di α.
Se $\alpha > 2$,

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^\alpha}\right)^2(1+o(1)) \sim \frac{1}{x^{2\alpha-2}}$$

che è integrabile a $+\infty$.
Se $\alpha = 2$, allora $t \sim 1$ e

$$g_\alpha(x) = \frac{2}{x^2}\left((1+o(1))\arctan(1+o(1)) - \frac{1}{2}\log(2+o(1))\right) \sim \frac{1}{x^2}(\pi/2 - \log 2),$$

che è integrabile a $+\infty$.
Infine per $\alpha < 2$, $x^2/1+x^\alpha \sim x^{2-\alpha}$ tende a $+\infty$ e

$$\arctan\left(\frac{x^2}{1+x^\alpha}\right) \sim \pi/2, \qquad \log(1+\left(\frac{x^2}{1+x^\alpha}\right)^2) \sim (2-\alpha)\log x,$$

da cui $g_\alpha(x) \sim \pi x^{-\alpha}$ che è integrabile se e solo se $\alpha > 1$. Concludendo, f è integrabile su E_α se e solo se $\alpha > 1$.

[1] Si ricordi che $f(x) \sim g(x)$ se e solo se $f(x) = g(x) + o(g(x))$, per $x \to x_0$.

Esercizio 2. *Sia* $Lf = \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$ *per* $x \in [0,1]$.

1. *Dimostrare che se* $f \in L^p([0,1])$ *allora* $Lf \in L^p([0,1])$ *per ogni* $p \in [1,+\infty]$.
2. *Calcolare la norma dell'operatore* $L : L^\infty([0,1]) \to L^\infty([0,1])$.
3. *Calcolare la norma dell'operatore* $L : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$.

1. Se $f \in L^p([0,1])$ per $p \in [1,+\infty)$, allora applicando la disuguaglianza di Hölder otteniamo:

$$\begin{aligned} \|Lf\|_p^p &= \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |x-t|^p |f(t)|^p \mathrm{d}t \right) \left(\int_0^x 1^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}t \right)^{p-1} \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|^p \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t \\ &= \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

   poiché $|x-t| < 1$.
   Per $p = +\infty$ invece abbiamo

$$\begin{aligned} \|Lf\|_\infty &= \mathrm{esssup}_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \mathrm{esssup}_{x\in[0,1]} \int_0^x (x-t)|f(t)|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (1-t)|f(t)|\mathrm{d}t \\ &\leq \left(\int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t \right) \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

   dalla monotonia dell'integrale rispetto lo spazio di integrazione e quella di $x-t$.

2. Dal punto precedente deduciamo che $\|L\|_{\mathrm{op}} \leq \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Per far vedere che vale l'uguaglianza cerchiamo una f tale che $\|f\|_\infty = 1$ e che $\|Lf\|_\infty = 1/2$, di modo da poter dedurre dalla disuguaglianza $\|Lf\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|L\|_{\mathrm{op}}$ e dal punto precedente, l'uguaglianza. Se prendiamo $f \equiv 1$ abbiamo $\|f\|_\infty = 1$ e

$$\|Lf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x (x-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

   In effetti tale scelta di f è quella per la quale le disuguaglianze precedenti sono in realtà delle uguaglianze (f di segno costante e costante in modulo rispettivamente).

3. Applicando il teorema di Fubini otteniamo

$$\begin{aligned}
\|Lf\|_1 &= \int_0^1 \left|\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^x (x-t)|f(t)|\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x-t)|f(t)|\chi_{\{0\leq t\leq x\}}\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{[0,1]\times[0,1]} (x-t)|f(t)|\chi_{\{0\leq t\leq x\leq 1\}}\, dt\, dx \\
&= \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \left(\int_0^1 (x-t)\chi_{\{t\leq x\leq 1\}}\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \left(\int_t^1 (x-t)\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}|f(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}\|f\|_1,
\end{aligned}$$

da cui $\|L\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{2}$. Come nel punto precedente, cerchiamo funzioni per cui valga l'uguaglianza nelle stime precedenti: anche stavolta la prima disuguaglianza è un'uguaglianza per funzioni di segno costante; la seconda uguaglianza invece potrà valere asintoticamente, per funzioni che si concentrano intorno al punto di massimo di $g(t) = \frac{(1-t)^2}{2}$, ad esempio $f_n(t) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$. Abbiamo $\|f_n\|_1 = 1$ e

$$Lf_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f_n(t)\mathrm{d}t = n\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{(1-t)^2}{2}\mathrm{d}t = n\left[-\frac{(1-t)^3}{6}\right]_0^{\frac{1}{n}} = n\frac{\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{6} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2},$$

poiché $\|Lf_n\|_1 \leq \|f_n\|_1 \|L\|_{\mathrm{op}}$ segue l'uguaglianza $\|L\|_{\mathrm{op}} = 1/2$.

Esercizio 3. *Sia* $1 < p < +\infty$ *e* $f \in L^p(0,+\infty)$*. Sia* $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, $x > 0$*. Provare che*

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p\,. \tag{0.1}$$

Innanzitutto, se $f \equiv 0$, allora la disuguaglianza è banalmente vera. Supponiamo allora $0 \neq f \in C_c(0,+\infty)$. Allora

$$\begin{aligned}
\|F\|_p^p = \int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right|^p dx &= \left[\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^p \frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_0^{+\infty} + \\
&- \frac{p}{1-p}\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^{p-1}}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|^{p-1} \operatorname{sgn}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) dx \\
&= \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} |F(x)|^{p-2}F(x)f(x)\,dx \leq \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} |F(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx \\
&\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{+\infty} |F(x)|^{\frac{p-1}{p-1}p}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\|F\|_p^{p-1}\|f\|_p\,.
\end{aligned}$$

dove la penultima disuguaglianza segue da quella di Hölder. Abbiamo allora (0.1).
Sia ora $f \in L^p(0,+\infty)$, dalla densità di $C_c(0,+\infty)$ in $L^p(0,+\infty)$ esiste $f_n \to_{L^p} f$. Allora, definendo

$F_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ si ha che

$$
\begin{aligned}
|F_n(x) - F(x)| &\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq \frac{1}{x}(\int_0^x |f_n(t) - f(t)|^p\,dt)^{\frac{1}{p}}(\int_0^x 1\,dt)^{1-1/p} \\
&\leq \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}(\int_0^x |f_n(t) - f(t)|^p\,dt)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}\|f_n - f\|_p\,,
\end{aligned}
$$

passando al limite, si ha allora $F_n(x) \to F(x)$ q.o. $x \in (0, +\infty)$. Inoltre, ogni F_n soddisfa chiaramente (0.1) per ogni n:

$$
\|F_n\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f_n\|_p\,.
$$

Si osservi tuttavia che in generale F_n converge solo *puntualmente* a F ma *non* in L^p (si prenda ad es $f_n = c_n\chi_{[0,1/n]}$ con $c_n > 0$ scelto opportunamente in modo che $f_n \to 0$ in L^p), quindi non possiamo passare semplicemente al limite dentro la norma p da ambo i lati della disuguaglianza precedente. Pertanto, usando il lemma di Fatou otteniamo

$$
\begin{aligned}
\|F\|_p^p = \int_0^{+\infty} |F(x)|^p\,dx &= \int_0^{+\infty} \liminf_{n\to\infty} |F_n(x)|^p\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} |F_n(x)|^p\,dx = \liminf_{n\to+\infty}\|F_n\|_p^p \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\|f_n\|_p^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\|f\|_p^p,
\end{aligned}
$$

quindi (0.1).

Esercizio 4. *Usando Fubini-Tonelli, calcolare il valore di*

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{xe^x}\,dx.
$$

Data $f(x,t) = e^{-tx}$, per $x > 0$ essa soddisfa

$$
\int_0^{+\infty} f(x,t)dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \tag{0.2}
$$

Usando il teorema di Fubini Tonelli, abbiamo allora, utilizzando (0.2)

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{xe^x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty}\sin^2 xe^{-xt-x}\,dx. \tag{0.3}
$$

Dall'integrazione iterata per parti otteniamo

$$
\int_0^{+\infty}\sin^2 xe^{-xt-x}\,dx = \frac{2}{(t+1)^3} - \frac{4}{(t+1)^2}\int_0^{+\infty}\sin^2 xe^{-xt-x}\,dx,
$$

da cui

$$
\int_0^{+\infty}\sin^2 xe^{-xt-x}\,dx = \frac{2}{(t+1)(t^2+2t+5)}.
$$

Non resta che sostituire in (0.3) e integrare per fratti semplici,

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{xe^x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{2}{(t+1)(t^2+2t+5)}\,dt = \left[\frac{1}{4}\log\frac{(t+1)^2}{t^2+2t+5}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}\log 5.
$$