PROPRIETÀ DEGLI ORTOGONALI

1. $E^\perp \triangleleft H$
2. $E \cap E^\perp \subset \{0\}$
3. $E \subset F \Rightarrow F^\perp \subset E^\perp$
4. $E^\perp = \left(\overline{\text{SPAN } E}\right)^\perp$
5. $\overline{\text{SPAN } E} \subset E^{\perp\perp}$

IN REALTÀ VALE $=$

DIM

(1) PRENDO $x, y \in E^\perp$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, FACCIO VEDERE CHE $\alpha x + \beta y \in E^\perp$:

PRENDO $z \in E$, $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \underbrace{(x,z)}_{\substack{=0 \\ x \in E^\perp}} + \beta \underbrace{(y,z)}_{\substack{=0 \\ y\in E^\perp}} = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in E^\perp$ SOTT. LINEARE

MOSTRO CHE È CHIUSO: $E^\perp = \bigcap_{y \in E} \underbrace{\{x \in H : (x,y) = 0\}}$ È CHIUSO PERCHÈ INTERSEZIONE DI CHIUSI

È CHIUSO PERCHÈ PREIMMAGINE DEL CHIUSO $\{0\}$ RISPETTO A $x \mapsto (x,y)$ CONTINUA

(2) PRENDO $x \in E \cap E^\perp$. POICHÈ $(x,y) = 0$ $\forall x \in E, y \in E^\perp$, SCELGO $x = y \Rightarrow \|x\|^2 = 0$

DEV'ESSERE $x = 0$

(3) PRENDO $x \in F^\perp \Rightarrow (x,y) = 0\ \forall y \in F$, IN PARTICOLARE VERO SE $y \in E \subset F$

$\Rightarrow (x,y) = 0\ \forall y \in E$ CIOÈ $x \in E^\perp$

(4) $E \subset \overline{\text{SPAN } E} \Rightarrow \overline{\text{SPAN } E}^\perp \subset E^\perp$. FACCIAMO VEDERE L'ALTRA INCL.

ANZITUTTO, $E^\perp \subset (\text{SPAN } E)^\perp$: PRENDO $y \in \text{SPAN } E$ $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$

$c_i \in \mathbb{R}$ $y_i \in E$

SE $x \in E^\perp$, ALLORA $(x,y) = c_1 \underset{0}{\underset{\parallel}{(x,y_1)}} + \dots + c_n \underset{0}{\underset{\parallel}{(x,y_n)}} = 0 \Rightarrow x \in (\text{SPAN } E)^\perp$

PERCHÈ $x \in E^\perp$, $y_i \in E$

INFINE, $(\text{SPAN } E)^\perp \subset \overline{\text{SPAN } E}^\perp$: PRENDO $x \in (\text{SPAN } E)^\perp$, $y \in \overline{\text{SPAN } E}$

$y = \lim_{n \to \infty} y_n$ $y_n \in \text{SPAN } E$

VOGLIO OTTENERE $(x,y) = 0$

$$(x,y) = (x, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n \to \infty} \underset{0}{\underset{\parallel}{(x, y_n)}} = 0$$

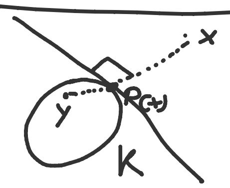
PERCHÈ $x \in (\text{SPAN } E)^\perp$, $y_n \in \text{SPAN } E$

0 perché $x \in (\overline{\text{span } E})^\perp$
$y_n \in \text{span } E$

(5) Prendo $x \in E$, $y \in E^\perp$ $\quad (x,y) = (y,x) = 0 \Rightarrow x \in E^{\perp\perp} \Rightarrow E \subset E^{\perp\perp}$

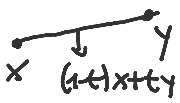
Ma $E^{\perp\perp}$ è sott. lineare chiuso per (1) $\Rightarrow$ se contiene E, contiene anche $\overline{\text{span } E}$.

PROIEZIONE SU CHIUSI CONVESSI



Non c'è un unico punto di distanza minima

($K \subset H$ è convesso se $(1-t)x + ty \in H$ $\forall x, y \in H$, $t \in [0,1]$)



LEMMA (di proiezione su chiusi convessi)

Sia $K \subset H$ sott. chiuso e convesso di un Hilbert H.
Allora $\forall x \in H$ $\exists!$ $P(x) \in K$ di distanza minima, cioè:

$$\|P(x) - x\| = d(x,K) := \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

P si chiama PROIEZIONE su K e verifica:

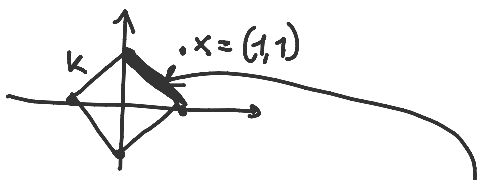
(1) $(P(x) - x, P(x) - y) \leq 0$ $\forall y \in K$, inoltre $P(x)$ è l'unico $z \in K$ per cui vale: (*) $(z - x, z - y) \leq 0$ $\forall y \in K$.

(2) $\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$, in particolare è continua

---

OSSERVAZIONE Se H non è Hilbert, potrebbe essere falso:

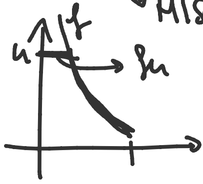
$H = \mathbb{R}^2$, $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ $\quad K = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$



$d(x,K)$ è minimizzata da tutti i punti $(t, 1-t)$ con $0 \leq t \leq 1$ (segmento)

$(L^{\Delta}([0,1]), \|\cdot\|_{L^1}) = (X, \|\cdot\|)$ non è completo: fisso $f \in L^{\overset{p}{1}} \setminus L^{\overset{q}{\Delta}}$

misura finita $\quad L^q \subset L^p$ se $q > p$



$f_n := \min\{f, n\}$ $\qquad f_n^p \to f^p$ q.o. $\qquad \int_0^1 f_n^p \nearrow \int_0^1 f^p$

$$\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

f_n è Cauchy ma non converge a nessun elemento di $X = L^\Delta$

f_n È CAUCHY MA NON CONVERGE A NESSUN ELEMENTO DI $X = L^\infty$ $\quad \|f_n - f\| \longrightarrow 0 \Downarrow$

PERCHÉ $f_n \to f \in L^1$ MA $f \notin L^\infty \Rightarrow f_n$ NON È CONVERGENTE IN X $\{f_n\}$ DI CAUCHY

DIM DEL LEMMA

FISSO $x \in H$ PRENDO $y_n \in K$ TALE CHE $\|y_n - x\| \longrightarrow d(x,K) = d$.

FACCIO VEDERE CHE CONVERGE: POICHÉ H È COMPLETO E K CHIUSO, BASTA FAR VEDERE CHE È CAUCHY: REGOLA D. PARALLELOGRAMMA $y_n - x$, $y_m - x$

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\underbrace{\|y_n - x\|^2}_{\leq d+\varepsilon} + 2\underbrace{\|y_m - x\|^2}_{\leq d+\varepsilon} - \underbrace{\|y_n + y_m - 2x\|^2}_{4\underbrace{\left\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\right\|^2}_{\geq d}} \leq 4(d+\varepsilon)^2 - 4d^2 = 4\varepsilon^2 + 8\varepsilon d \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$n, m \geq N$

$\Rightarrow y_n$ È CAUCHY $\Rightarrow$ CONVERGE A $y \in K$ $\qquad \geq d$ PERCHÉ $\frac{y_n+y_m}{2} \in K$ CONVESSO

FACCIO VEDERE CHE y È UNICO: SUPPONIAMO $\exists\, y_1 \neq y_2$ CON $\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\| = d$

$$\underbrace{\|y_1 + y_2 - 2x\|^2}_{4\left\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\right\|^2} = 2\underbrace{\|y_1 - x\|^2}_{d} + 2\underbrace{\|y_2 - x\|^2}_{d} - \underbrace{\|y_1 - y_2\|^2}_{\neq 0} < 4d^2 \Rightarrow \left\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\right\| < d, \text{ ASSURDO.}$$

DIMOSTRIAMO 1 FISSO $y \in K$, $P(x)$ MINIMIZZA RISPETTO A $(1-t)P(x) + ty : 0 \leq t \leq 1$

$$0 \geq \|P(x) - x\|^2 - \|(1-t)P(x) + ty - x\|^2 = \cancel{\|P(x) - x\|^2} - (\cancel{\|P(x) - x\|^2} + \|-tP(x) + ty\|^2 + 2(P(x) - x, -tP(x) + ty))$$

$$= \underbrace{-t^2\|P(x) - y\|^2}_{} + 2t(P(x) - x, P(x) - y)$$

DIVIDO PER $2t$ $\Rightarrow (P(x) - x, P(x) - y) \leq \frac{t}{2}\|P(x) - y\|^2 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

DIMOSTRO ★ SUPPONGO $(z - x, z - y) \leq 0 \;\; \forall y \in K$, FACCIO VEDERE $\|z - x\| \leq \|y - x\|$

$$\|z - x\|^2 - \|y - x\|^2 = \|z - x\|^2 - \|z - x - (z - y)\|^2 = \cancel{\|z - x\|^2} - (\cancel{\|z - x\|^2} + \|z - y\|^2 - 2(z - x, z - y))$$

$$= \underbrace{-\|z - y\|^2}_{\leq 0} + 2\underbrace{(z - x, z - y)}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow \|z - x\| \leq \|y - x\|$$

DIMOSTRIAMO 2: PRENDO $x, y \in H$, $(P(x) - x, P(x) - z) \leq 0 \;\; \forall z, w \in K$

$(P(y) - y, P(y) - w) \leq 0$ $\qquad z = P(y)$

$w = P(x)$

$0 \geq (P(x) - x, P(x) - P(y)) + (P(y) - y, P(y) - P(x)) = \ldots$

$w = P(x)$

$$0 \geq \left(P(x)-x,\, P(x)-P(y) \right) + \left(P(y)-y,\, P(y)-P(x) \right) = \left(P(x)-P(y) - x + y,\, P(x)-P(y) \right)$$

$$= \|P(x)-P(y)\|^2 - \left(x-y,\, P(x)-P(y) \right) \Rightarrow \quad \|P(x)-P(y)\|^{\cancel{2}} \leq \left(x-y,\, P(x)-P(y) \right)$$

$$\leq \|x-y\| \, \cancel{\|P(x)-P(y)\|}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $K = \overline{B_1(0)}$

$$P(x) = \begin{cases} x & \|x\| \leq 1 \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \|x\| > 1 \end{cases}$$

CASO IMPORTANTISSIMO! $K \lhd H$ SOTT. LINEARE CHIUSO