TEOREMA (a) $u \in W^{1,p}$ (b) $\left|\int u\varphi'\right| \le C \|\varphi\|_{L^{p'}}$

(c) $\|u(x+h)-u(x)\|_{L^p} \le C|h|$

$p>1$

(a) $\Rightarrow$ (b) ✓

(b) $\Rightarrow$ (a) ✓

(b) $\Leftrightarrow$ (c)

DIM (b) $\Rightarrow$ (c)

$$\int_a^b \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\varphi(x)\,dx = \int_a^b \frac{u(x+h)\varphi(x)}{h} - \int_a^b \frac{u\varphi}{h} \overset{y=x+h}{=} \int_a^b \frac{u(y)\varphi(y-h)}{h} - \int_a^b \frac{u\varphi}{h}$$

$$= \int_a^b u(y)\Big(-\underbrace{\frac{\varphi(y)-\varphi(y-h)}{-h}}_{\to -\varphi'(y) \text{ PUNTUALMENTE}}\Big) \xrightarrow[h\to 0]{\text{CONV. DOM}} -\int_a^b u\varphi'$$

L' INTEGRANDA È $\le |u|\cdot C \Rightarrow$ PASSO AL LIM. SOTTO $\int$

$$\Rightarrow \left|\int \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\varphi(x)\,dx\right| \overset{(b)}{\le} C\|\varphi\|_{L^{p'}} \qquad p'=\frac{p}{p-1}$$

PRENDO φ CHE APPROSSIMA $|u(x+h)-u(x)|^{p-1}$ SEGNO $(u(x+h)-u(x))$

$$\frac{\|u(x+h)-u(x)\|^p_{L^p}}{h} = \int \frac{|u(x+h)-u(x)|^p}{h}dx \le C\|u(x+h)-u(x)\|^{p-1}_{L^p}$$

$$\Rightarrow \|u(x+h)-u(x)\|_{L^p} \le C|h|.$$

(c) $\Rightarrow$ (b)

$$\underbrace{\left|\int \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\varphi(x)\,dx\right|}_{\to -\int u\varphi' \text{ (COME NEL PUNTO PRIMA)}} \le \left\|\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^{p'}} \overset{(c)}{\le} C\|\varphi\|_{L^{p'}}$$

$\Rightarrow \left| \int u \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}}$.

DEF UN OPERATORE LINEARE CONTINUO $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ TRA SPAZI NORMATI SI DICE <u>COMPATTO</u> SE $\forall \{x_n\}$ LIMITATA IN X, $\{Ax_n\}$ HA ESTRATTE CONVERGENTI IN Y. EQUIVALENTEMENTE, A È COMPATTO SE $\forall K \subset X$ LIMITATO $A(K)$ È REL. COMPATTO IN Y.

NOTAZIONE: $K(X,Y)$, $X=Y \Rightarrow K(X)$.

PROP. SE Y È <u>BANACH</u>, ALLORA $K(X,Y) \lhd \mathcal{L}(X,Y)$.

<u>DIM.</u> OVVIO CHE $K(X,Y)$ È SOTT. LINEARE

MOSTRIAMO CHE È CHIUSO: PRENDO $\{A_n\}$ COMPATTI $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$, VOGLIO A COMPATTO.

PRENDO $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ LIMITATA IN X. FISSATO n, $\{A_n x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ HA ESTRATTE CONVERGENTI E DI CAUCHY.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0: \underline{\|A_N - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon}, \quad n,m \geq N' \Rightarrow \underline{\|A_N x_n - A_N x_m\| \leq \varepsilon}$

SICCOME Y È COMPLETO, BASTA FAR VEDERE $\{Ax_n\}$ CAUCHY:

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \underbrace{\|Ax_n - A_N x_n\|}_{\leq \underbrace{\|A_N - A\|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{\|x_n\|}_{\leq C}} + \underbrace{\|A_N x_n - A_N x_m\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|A_N x_m - A x_m\|}_{\leq C\varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon(2C+1)$$

$\Rightarrow \{Ax_n\}$ È CAUCHY E A È COMPATTO.

ESEMPI ① SE $\dim Y < +\infty$, OGNI $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ È COMPATTO PERCHÉ I LIMITATI IN Y SONO REL. COMPATTI. ALLO STESSO MODO, SE $\operatorname{Ran}(A)$ HA DIM. FINITA ALLORA A È COMPATTO. GRAZIE ALLA PROPOSIZIONE, A È COMPATTO ANCHE SE È <u>LIMITE DI OPERATORI DI RANGO FINITO</u>

② $A: \ell_2 \to \ell_2$ È COMPATTO IN QUANTO LIMITE DI A_n

$(x(1), x(2) \ldots) \to \left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3} \ldots\right)$

$A_n: \ell_2 \longrightarrow \ell_2$

$(x(1), x(2) \dots) \to \left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \dots, \frac{x(n)}{n}, 0, \dots\right)$

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\|=1} \sqrt{\sum_{k\geq n+1} \frac{x(k)^2}{k^2}} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k\geq n+1} |x(k)|^2 \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ALLO STESSO MODO, $A: \ell_2 \to \ell_2$ È COMPATTO $\boxed{\text{SE } a_n \to 0}$.
$(x(1), x(2) \dots) \mapsto (a_1 x(1), a_2 x(2), \dots)$

③ $I: X \to X$ IDENTITÀ <u>NON</u> È COMPATTO SE $\dim X = +\infty$ PERCHÉ $\exists \{x_n\}$ LIMITATE SENZA ESTRATTE CONVERGENTI.

④

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "B\circ A"'] & Y \arrow[r, "B"] & Z \end{tikzcd}$$

SE A OPPURE B È COMPATTO, $B\circ A$ È COMPATTO:

A È COMPATTO, $K \subset X$ LIMITATO $\Rightarrow A(K)$ COMPATTO $\xRightarrow{B \text{ CONTINUA}} B(A(K))$ COMPATTO

B È COMPATTO, $K \subset X$ LIMITATO $\underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ LIMITATO}}}{\Rightarrow} A(K)$ LIMITATO $\Rightarrow B(A(K))$ COMPATTO.

$\boxed{\text{DEF.}}$ SIANO $(X, \|\cdot\|_X)$ E $(Y, \|\cdot\|_Y)$ SPAZI NORMATI CON $X \subset Y$. DICO CHE X <u>SI IMMERGE IN MODO CONTINUO</u> IN Y SE $\begin{matrix} i: X \to Y \\ x \to x \end{matrix}$ È <u>CONTINUA</u>, CIOÈ $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ $\forall x \in X$ PER QUALCHE $C > 0$. NOTAZIONE: $X \hookrightarrow Y$

X <u>SI IMMERGE IN MODO COMPATTO</u> IN Y SE $\begin{matrix} i: X \to Y \\ x \to x \end{matrix}$ È <u>COMPATTA</u>, CIOÈ $\{x_n\}$ LIMITATA IN $X \Rightarrow$ HA ESTRATTE CONVERGENTI IN Y.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

① $E \subset Y$ CON LA NORMA INDOTTA SI IMMERGE IN MODO CONTINUO SEMPRE, IN MODO COMPATTO $\Leftrightarrow \dim E < +\infty$.

② $X = L^p((a,b))$ $Y = L^q((a,b))$ $a, b \in \mathbb{R}$ $+\infty \geq p \geq q \geq 1$ $L^p((a,b)) \hookrightarrow L^q((a,b))$
(DALLA DISUG. HÖLDER $\|f\|_{L^q} \leq (b-a)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}$),

ALLO STESSO MODO $W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow \dots$

(DALLA DISUG. HOLDER $\|g\|_{L^q} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|g\|_{L^p}$),

ALLO STESSO MODO $W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow W^{1,q}((a,b))$.

IN MODO SIMILE, $C^{0,\alpha}([a,b])$ $\left(\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)$

$C^{0,\alpha}([a,b]) \hookrightarrow C^{0,\beta}([a,b]) \hookrightarrow L^p((a,b))$ SE $0\leq\alpha\leq\beta\leq 1$

$1\leq p\leq\infty$.

(3) SPAZI DI SUCCESSIONI: $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ SE $p\leq q$ $(\|x\|_q \leq \|x\|_p)$

TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ

SIA $\{u_n\}$ LIMITATA IN $C([a,b])$ ED EQUICONTINUA, CIOÈ

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0 : |x-y|<\delta \Rightarrow |u_n(x)-u_n(y)|<\varepsilon$ (ε,δ NON DIPENDONO DA n)

ALLORA $\{u_n\}$ HA ESTRATTE CONVERGENTI IN $C([a,b])$

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ $C^{0,\alpha}([a,b])$ SI IMMERGE IN MODO COMPATTO IN $C^{0,\beta}([a,b])$ SE $\alpha>\beta$

$\boxed{\text{DIM}}$ PRENDO $\{u_n\}$ LIMITATA IN $C^{0,\alpha}$, MOSTRO CHE CONVERGE IN $C^{0,\beta}$ $\forall\beta<\alpha$

$$\underbrace{\|u_n\|_\infty + \sup_{x\neq y}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|}{|x-y|^\alpha}}_{\text{LIMITATA IN } C([a,b])} \leq C.$$

FACCIO VEDERE CHE È EQUICONTINUA:

$|x-y|\leq\delta \Rightarrow |u_n(x)-u_n(y)| \leq C|x-y|^\alpha \leq C\delta^\alpha = \varepsilon$ SE $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

$\Rightarrow$ PER ASCOLI-ARZELÀ $\exists u\in C([a,b]) : u_n\to u$ IN $C([a,b])$.

FACCIAMO VEDERE CHE $u_n \to u$ ANCHE IN $C^{0,\beta}([a,b])$ $\forall\beta<\alpha$:

CHIAMO $v_n = u_n - u$, VOGLIO $\sup_{x\neq y}\frac{|v_n(x)-v_n(y)|}{|x-y|^\beta}\to 0$

$$\frac{|v_n(x)-v_n(y)|}{|x-y|^\beta} = \left(\frac{|v_n(x)-v_n(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} |v_n(x)-v_n(y)|^{1-\frac{\beta}{\alpha}}, \quad 1-\frac{\beta}{\alpha}>0$$

$$\leq \underbrace{\left(\sup_{x\neq y}\frac{|v_n(x)-v_n(y)|}{|x-y|^\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}}_{\leq C} \underbrace{\left(2\|v_n\|_\infty\right)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}}_{\to 0}$$

PERCHÉ $\|u_n - u\|_\infty \to 0$

$\Rightarrow \sup \frac{|v_n(x)-v_n(y)|}{\ldots} \to 0 \Rightarrow$ IMMERSIONE COMPATTA

$\geq C \qquad 0$ PERCHÉ $\|u_n - u\|_\infty \to 0$

$$\Rightarrow \sup_{x \neq y} \frac{|v_n(x) - v_n(y)|}{|x-y|^\beta} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow \text{ IMMERSIONE COMPATTA!}$$

TEOREMA (DI IMMERSIONE DI SOBOLEV)

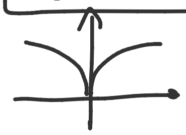
SE $u \in W^{1,p}((a,b))$ CON $a,b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $p \in [1,+\infty]$, ALLORA $u \in C^{0,1-\frac{1}{p}}((a,b))$

L'IMMERSIONE $W^{1,p}((a,b)) \xrightarrow{\circledast} C^{0,1-\frac{1}{p}}((a,b))$ È CONTINUA SEMPRE.

L'IMMERSIONE $W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow C^{0,\alpha}([a,b])$ È COMPATTA SE $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$ E $a,b \in \mathbb{R}$

(LA COMPATTEZZA DELL'IMMERSIONE SEGUE DA $\circledast$ + COROLLARIO DI ASCOLI-ARZELÀ)

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $u(x) = |x|^\alpha \quad 0 < \alpha < 1$

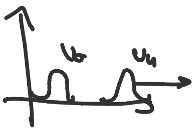


$u \in W^{1,p}((-1,1)) \Leftrightarrow p < \frac{1}{1-\alpha}$

$u \in C^{0,\alpha}([-1,1])$

$\alpha < 1 - \frac{1}{p}$

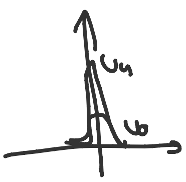
$\boxed{\text{OSS}}$ ① $W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ NON È MAI COMPATTA: $u_n = u_0(x-n)$



$\|u_n\|_{W^{1,p}} = \|u_0\|$ LIMITATA MA NON CONVERGE:

$u_n \to 0$ Q.O. $\Rightarrow$ L'UNICO LIMITE POSSIBILE È $u = 0$, MA $\|u_n\| \not\to 0$

② $W^{1,p}((a,b)) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{1}{p}}((a,b))$ NON È COMPATTA $\qquad u_n = \dfrac{u_0(nx)}{n^{1-\frac{1}{p}}}$



$\|u_n'\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p} \Rightarrow$ LIMITATA

MA $u_n \not\to 0$ IN $C^{0,1-\frac{1}{p}}$ PERCHÉ $\displaystyle \sup_{x \neq y} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} = \sup_{x \neq y} \frac{|u_0(x) - u_0(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}}$