SISTEMI ORTONORMALI COMPLETI

PROPOSIZIONE OGNI SPAZIO DI HILBERT HA UN SISTEMA O.N. COMPLETO

UTILIZZIAMO IL **LEMMA DI ZORN**

SIA $(P, \lesssim)$ INSIEME <u>PARZIALMENTE ORDINATO</u> $P \neq \emptyset$ TALE CHE

(*) OGNI SOTTOINSIEME $Q \subset P$ TOTALMENTE ORDINATO HA UN <u>MAGGIORANTE</u> ($m \in P$ TALE CHE $q \lesssim m \ \forall q \in Q$).

ALLORA P HA ALMENO UN ELEMENTO MASSIMALE $\underline{M}$ ($\nexists p \in P \setminus \{M\}$ TALI CHE $M \lesssim p$)

<u>DIM</u> APPLICHIAMO IL LEMMA DI ZORN A:

$P = \{$SISTEMI ORTONORMALI SU $H\}$ $\lesssim$ È L'INCLUSIONE TRA INSIEMI

VERIFICHIAMO LA PROPRIETÀ (*): PRENDO Q TOT. ORDINATO

Q È INSIEME DI SISTEMI "UNO DENTRO L'ALTRO". UN MAGGIORANTE SARÀ $E_0 = \bigcup_{E \in Q} E$. $E \subseteq E_0$ PER COSTRUZIONE, FACCIO VEDERE $E_0 \in P$

SE $e \in E_0$, ALLORA $e \in E$ PER QUALCHE SISTEMA O.N. $E \Rightarrow \|e\| = 1$ ✓

SE $e, f \in E_0$, $e \in E$ $f \in F$ PER QUALCHE E, F, POICHÉ Q È TOT. ORDINATO AVRÒ $E \subset F$ (A MENO DI SCAMBIARLI) $\Rightarrow e, f \in F \Rightarrow e \perp f$ ✓ $\Rightarrow$ VALE (*)

ESISTE UN SISTEMA O.N. <u>MASSIMALE RISPETTO A $\subseteq$</u> $\tilde{E}$

VERIFICO CHE $\tilde{E}$ È COMPLETO: PER ASSURDO CHE NON LO SIA, CIOÈ $\tilde{E}^{\perp} \neq \{0\}$. PRENDO $e \in \tilde{E}^{\perp}$ CON $\|e\| = 1$ $\Rightarrow \tilde{E} \cup e$ È SISTEMA O.N. CHE CONTIENE STRETTAMENTE $\tilde{E}$, IMPOSSIBILE PERCHÉ $\tilde{E}$ MASSIMALE!

COROLLARIO UN HILBERT H HA UN SISTEMA O.N. COMPLETO <u>NUMERABILE</u> $\Leftrightarrow$ H È <u>SEPARABILE</u> (CIOÈ HA UN SOTTOINSIEME DENSO E NUMERABILE)

DIM ($\Rightarrow$) SUPPONIAMO CHE $\exists \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ SISTEMA O.N. COMPLETO NUMERABILE,

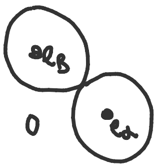
$\mathrm{SPAN}_{\mathbb{Q}} \{e_n\} = \{c_1 e_1 + \ldots$ [illegible]

$\Rightarrow$ $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ SISTEMA O.N. COMPLETO NUMERABILE,

$\text{SPAN}_{\mathbb{Q}}\{e_n\} = \{c_1 e_1 + \dots + c_n e_n : c_i \in \mathbb{Q}\}$ È NUMERABILE, È DENSO PERCHÉ LO È $\text{SPAN}_{\mathbb{R}}\{e_n\}$

($\Leftarrow$) SUPPONIAMO $\exists\, \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ SISTEMA O.N. COMPLETO <u>NON</u> NUMERABILE

$\alpha \neq \beta\ \|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2} \Rightarrow B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(e_\alpha) \cap B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(e_\beta) = \emptyset$ APERTI DISGIUNTI PIÙ CHE NUMERABILI



OGNI DENSO DOVRÀ AVERE UN PUNTO IN CIASCUNA $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(e_\alpha) \Rightarrow$ DOVRÀ ESSERE PIÙ CHE NUMERABILE.

ESEMPI $L^2([-\pi,\pi])$ È SEPARABILE, INFATTI HA UN SISTEMA O.N. COMPLETO NUMERABILE (POLINOMI TRIGONOMETRICI)

$L^2(\#)$ HA UN SISTEMA O.N. COMPLETO DELLA STESSA CARDINALITÀ DI $X \Rightarrow L^2(\#)$ È SEPARABILE SSE X È NUMERABILE, IN PARTICOLARE LO È ℓ_2.

TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI O.N. COMPLETI)

SIA $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ SISTEMA O.N. SU UN HILBERT H. ALLORA, SI EQUIVALGONO:

1. $\{e_\alpha\}$ È COMPLETO
2. $\{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$
3. $\boxed{x = \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)e_\alpha}\ \forall x \in H$
4. $x = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha e_\alpha$ PER QUALCHE $c_\alpha \in \mathbb{R}$
5. $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)^2\ \forall x\in H$ (UGUAGLIANZA DI BESSEL)
6. $(x,y) = \sum_{\alpha\in A} (x,e_\alpha)(y,e_\alpha)\ \forall x,y\in H$ (IDENTITÀ DI PARSEVAL)

DIM (1) $\Leftrightarrow$ (2) SEGUE DAL TEO. DI PROIEZIONE. $H = \overline{\text{SPAN}\{e_\alpha\}} \oplus \{e_\alpha\}^\perp$ DUNQUE $H = \overline{\text{SPAN}\{e_\alpha\}} \Leftrightarrow \{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$

DIM ① ⟺ ② SEGUE DAL TEO. DI PROIEZIONE: $H = \overline{\mathrm{SPAN}\{e_\alpha\}} \oplus \{e_\alpha\}^\perp$

DUNQUE $H = \overline{\mathrm{SPAN}\{e_\alpha\}} \Leftrightarrow \{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$

② ⟹ ③ $y = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha \Rightarrow (y, e_\alpha) = \left(\sum_{\beta \in A} (x, e_\beta) e_\beta, e_\alpha \right) = \sum_\beta (x, e_\beta) \overbrace{(e_\beta, e_\alpha)}^{\delta_{\alpha\beta}} = (x, e_\alpha)$

$\Rightarrow y - x \perp e_\alpha \quad \forall \alpha \in A \Rightarrow y - x \in \{e_\alpha\}^\perp = \{0\} \Rightarrow x = y = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$

③ ⟹ ② $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha$ SE $x \in \{e_\alpha\}^\perp \Rightarrow x = \sum 0\, e_\alpha = 0 \Rightarrow \{e_\alpha\}^\perp = \{0\}$

③ ⟹ ④ OVVIO

④ ⟹ ③ $x = \sum_\alpha c_\alpha e_\alpha \Rightarrow (x, e_\alpha) = \left(\sum_\beta c_\beta e_\beta, e_\alpha \right) = \sum_\beta c_\beta (e_\beta, e_\alpha) = c_\alpha$

$\Rightarrow x = \sum_\alpha (x, e_\alpha) e_\alpha$

③ ⟺ ⑤ $\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2 = \left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2$ (COME NELLA DIM. DELLA DISUG. BESSEL)

MANDANDO $N \xrightarrow{⑤} \infty$, SE CONVERGONO A 0 VALGONO ⑤ E ③ ALTRIMENTI, NON VALGONO ⑤ NÉ ③

⑥ ⟹ ⑤ BASTA PRENDERE $y = x$

⑤ ⟹ ⑥ APPLICO BESSEL A $x, y, x+y$:

$$\|x+y\|^2 = \sum (x+y, e_\alpha)^2 = \sum \left(\cancel{(x, e_\alpha)^2} + \cancel{(y, e_\alpha)^2} + 2 \boxed{(x, e_\alpha)(y, e_\alpha)} \right)$$

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y) = \cancel{\sum (x, e_\alpha)^2} + \cancel{\sum (y, e_\alpha)^2} + 2 \boxed{(x,y)}$$

OSSERVAZIONI ① NEL CASO $H = L^2([-\pi, \pi])$ FOURIER TRIGONOMETRICO LA CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER È IN L^2. QUELLA PUNTUALE È PIÙ DELICATA.

② CHE SUCCEDE SE $\{e_\alpha\}$ NON È COMPLETO?

AVRÒ $E = \overline{\mathrm{SPAN}\{e_\alpha\}}$, $E^\perp = \overline{\mathrm{SPAN}\{f_\beta\}}$ PER QUALCHE $\{f_\beta\}_{\beta \in B}$

$\{e_\alpha\} \cup \{f_\beta\}$ È SISTEMA O.N. COMPLETO PER H

$\Rightarrow x = \sum (x, e_\alpha) e_\alpha + \sum (x, f_\beta) f_\beta \Rightarrow$ SARANNO LE PROIEZIONI SU $E, E^\perp$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\sum (x,e_\alpha)e_\alpha}_{\in E} + \underbrace{\sum (x,f_B) f_B}_{\in E^\perp}$$ $\Rightarrow$ SARANNO LE PROIEZIONI SU $E, E^\perp$

IN PARTICOLARE, $P_x = \sum_{\alpha \in A} (x,e_\alpha)e_\alpha$ $\forall x$

COROLLARIO SIA $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ SISTEMA O.N. COMPLETO SU UN HILBERT H.

ALLORA H È ISOMETRICO A $L^2(\#)$ DEFINITO SU $(A, P(A), \#)$ SPAZIO MISURA

$$L^2(\#) = \left\{ f: A \to \mathbb{R} : \sum_{\alpha \in A} f(\alpha)^2 < +\infty \,,\ f(\alpha) \neq 0 \text{ PER AL PIÙ NUMERABILI } \alpha \right\}$$

IN PARTICOLARE, SE H È SEPARABILE È ISOMETRICO A ℓ_2 (ANCHE $L^2([a,b])$ LEBESGUE)

L'ISOMETRIA È DATA DA $H \xrightarrow{\phi} L^2(\#)$ "ASSOCIO A x I SUOI COEFF. FOURIER RISPETTO A $\{e_\alpha\}$"

$$x \longrightarrow \alpha \to (x, e_\alpha)$$

DIM

LINEARITÀ OVVIA.

ISOMETRIA: USO L'UGUAGLIANZA DI BESSEL

$$\|\phi(x)\|^2_{L^2(\#)} := \int_A |\phi(x)|^2 d\# = \sum_{\alpha \in A} (x,e_\alpha)^2 = \|x\|^2_H$$

SURIETTIVITÀ: PRENDO $f \in L^2(\#)$, FACCIO VEDERE CHE $f = \phi(x)$

CHI È x? $\quad x = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha) e_\alpha$

BEN DEFINITA PERCHÉ $f(\alpha) = 0$ TRANNE AL PIÙ NUMERABILI

INOLTRE $f(\alpha) = (x, e_\alpha)$ (CIOÈ $f = \phi(x)$) PERCHÈ $x = \sum_\alpha (x,e_\alpha)e_\alpha$

CARATTERIZZAZIONE DEI SISTEMI O.N. COMPLETI

PROSSIMO ARGOMENTO: ESTENSIONI DI FUNZIONALI LINEARI CONTINUI

X SP. NORMATO

$E \subset X$ SOTT. LINEARE

DATO $L: E \to \mathbb{R}$ LINEARE CONTINUO

VOGLIO "ESTENDERLO" A $\tilde{L}: X \to \mathbb{R}$

(TEOREMA DI HAHN-BANACH)