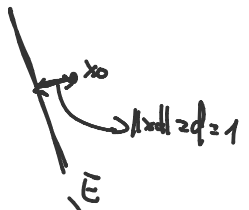
CONVERGENZA DEBOLE

IDEA: LA CONVERGENZA (IN NORMA) È UNA CONDIZIONE MOLTO FORTE (IN DIM. ∞)
VOGLIAMO UN'ALTRA NOZIONE DI CONVERGENZA PIÙ FACILE DA VERIFICARE

INFATTI, ESISTONO SEMPRE SUCCESSIONI LIMITATE SENZA ESTRATTE CONVERGENTI.

$\boxed{\text{LEMMA}}$ (DI QUASI ORTOGONALITÀ)

SIA X SP. NORMATO, $E \subset X$ SOTT. LINEARE NON DENSO
ALLORA $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in X : \|x_0\| = 1,\ d(x_0, E) \geq 1 - \varepsilon$



$\boxed{\text{OSS}}$ ① SE X È HILBERT, BASTA PRENDERE $x_0 \in E^\perp$

$$\Rightarrow d(x_0, E)^2 = \inf_{y \in E} \|x_0 - y\|^2 = \inf \left(\|x_0\|^2 + \|y\|^2 \right) = \|x_0\|^2 \quad (\varepsilon = 0)$$

$\boxed{\text{DIM}}$ $\exists x \in X \setminus \overline{E}$ (E NON DENSO) $\Rightarrow d(x, E) > 0$

PER DEF. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists z \in E$ TALE CHE $\|z - x\| \leq \frac{d(x,E)}{1 - \varepsilon}$

DEFINISCO $x_0 = \frac{x - z}{\|x - z\|}$. PER COSTRUZIONE $\|x_0\| = 1$.

VOGLIO AVERE $\|x_0 - y\| \geq 1 - \varepsilon \quad \forall y \in E$

$$\|x_0 - y\| = \left\| \frac{x - \overbrace{z - y\|x - z\|}^{z + y\|x - z\| \in E}}{\|x - z\|} \right\| \geq \frac{d(x, E)}{\|x - z\|} \geq 1 - \varepsilon$$

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ SE $\dim X = +\infty$, LA PALLA UNITÀ CHIUSA $\overline{B_1(0)} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ NON È COMPATTA.

$\boxed{\text{DIM}}$ $\exists \{E_n\}$ SUCC. STR. CRESCENTE DI SOTT. LINEARI CHIUSI
$E_n \subsetneq E_{n+1}$. VOGLIO TROVARE $x_n \in \overline{B_1(0)}$ SENZA ESTRATTE CONVERGENTI
APPLICO IL LEMMA A $E_n \subset E_{n+1}$: $\exists x_n \in E_{n+1}$: $\|x_n\| = 1,\ d(x_n, E_n) \geq \frac{1}{2}$

MA $x_n \in E_n$ $\forall m<n$ $\Rightarrow$ $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ $\forall m<n$ $\Rightarrow$ x_n NON È CAUCHY E NON CONVERGE.

DEFINIZIONE SIA $\{x_n\}$ SUCC. IN UNO SP. NORMATO X, SIA $x_0 \in X$ DICO CHE x_n CONVERGE DEBOLMENTE A x_0 SE

$\forall L \in X^*$ VALE $Lx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Lx_0$

NOTAZIONE: $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x_0$

PROPOSIZIONE

1. SE $x_n \to x_0$ ALLORA $x_n \rightharpoonup x_0$
2. SE $x_n \rightharpoonup x_0$ ALLORA $\{x_n\}$ È LIMITATA
3. SE $\dim X < +\infty$ ALLORA $x_n \to x_0 \iff x_n \rightharpoonup x_0$
4. SE $X = \ell_1$ ALLORA $x_n \to x_0 \iff x_n \rightharpoonup x_0$

DIM

1. FISSO $L \in X^*$, VOGLIO AVERE $Lx_n \to Lx_0$:

$$|Lx_n - Lx_0| = |L(x_n - x_0)| \leq \|L\|_{X^*} \|x_n - x_0\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Lambda_n : L \mapsto Lx_n$ $\Lambda_n \in X^{**}$
Λ_n LIMITATA PUNTUALMENTE
$\Rightarrow$ (BANACH-STEINHAUS) LIMITATA IN NORMA

2. SEGUE DA BANACH-STEINHAUS: $\forall L \in X^*$, $\{Lx_n\}$ È LIMITATA (PERCHÉ CONVERGE) $\Rightarrow$ SARÀ LIMITATA ANCHE IN NORMA: $\sup_n \|x_n\| < +\infty$.

3. SE $\dim X$ È FINITA, PRENDO $\{e_1, \dots, e_N\}$ PASSO A $\{L_1 \dots L_N\}$ BASE DUALE $L_i e_j = \delta_{ij}$, CIOÈ $x = (L_1 x)e_1 + \dots + (L_N x)e_N$.

SE $x_n \to x$ ALLORA $x_n \rightharpoonup x$ SEMPRE, VICEVERSA SE $x_n \rightharpoonup x$

$$x_n = (L_1 x_n)e_1 + \dots + (L_N x_n)e_N$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$(L_1 x)e_1 + \dots + (L_N x)e_N = x \quad \Rightarrow x_n \to x$$

4. GIÀ VISTO: DALLA STRUTTURA DEL DUALE DI ℓ_1.

$$x_n \rightharpoonup x \iff \sum_k x_n(k) y(k) \to \sum_k x(k) y(k) \quad \forall y \in \ell_\infty$$

LEMMA PRECEDENTE: $$\underbrace{\|x_n - x\| \to 0}_{x_n \to x} \iff \underbrace{\sum (x_n(k) - x(k)) y(k) \to 0 \quad \forall y \in \ell_\infty}_{x_n \rightharpoonup x}$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ 1) $\{e_n\}$ BASE STANDARD INFINITO-DIMENSIONALE $e_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ IN ℓ_p $1<p<\infty$ ($p=1$ NO PERCHÈ EQUIVARREBBE A $\|e_n\| \to 0$, $\|e_n\|=1$; $p=\infty$ NON SI DIMOSTRA PERCHÈ $(\ell_\infty)^*$ È "STRANO")

MA $e_n \not\to 0$ ($\|e_n\|=1$)

DEVO FAR VEDERE CHE $\sum_k y(k) e_n(k) \to 0 \quad \forall y \in \ell_{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$

MA $\sum_k y(k) e_n(k) = y(n)$, $y(n) \to 0$ PERCHÈ $\sum |y(k)|^{p'}$ CONVERGE

2) $\{e_n\}$ SISTEMA ORTONORMALE NUMERABILE DI UN HILBERT QUALSIASI

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE e_n NON CONVERGE (IN NORMA), PERÒ $e_n \rightharpoonup 0$, CIOÈ $(x, e_n) \to 0 \ \forall x \in H$. INFATTI,

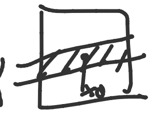
$$\sum_n (x, e_n)^2 \le \|x\|^2 < \infty \quad \text{(DISUG. BESSEL)}$$

$\Rightarrow (x, e_n)^2$ INFINITESIMA CIOÈ $(x, e_n) \to 0$

TOPOLOGIA DEBOLE

IDEA: TOPOLOGIA FORTE $\to$ INTORNI = PALLE LIMITATE (IN TUTTE LE DIREZIONI)
TOPOLOGIA DEBOLE $\to$ INTORNI LIMITATI IN UN NUMERO FINITO DI DIREZIONI

DIMENSIONE FINITA $\to$ STESSA COSA
DIMENSIONE INFINITA $\to$ DIVERSE!

$|L(x-x_0)| < \varepsilon$ 

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ LA TOPOLOGIA DEBOLE SU UNO SP. NORMATO X È QUELLA DATA DAI SEGUENTI INTORNI:

$$U_{L_1 \dots L_N, \varepsilon}(x_0) = \{ x \in X : |L_1(x - x_0)| < \varepsilon, \dots, |L_N(x-x_0)| < \varepsilon \} \quad x_0 \in X,\ \varepsilon > 0$$
$L_1, \dots, L_N \in X^*$ FINITI

NOTAZIONE: $\sigma(X, X^*)$

$L_1, \dots, L_N \in \Lambda$
FINITI

NOTAZIONE: $\sigma(X, X^*)$

GLI APERTI IN $\sigma(X,X^*)$ SI CHIAMANO DEBOLMENTE APERTI
I CHIUSI " " " " DEBOLMENTE CHIUSI.

OSSERVAZIONE

1. SE $\dim X < +\infty$ ALLORA $\sigma(X,X^*)$ È LA TOPOLOGIA DELLA NORMA
2. IN GENERALE, $x_n \rightharpoonup x \iff$ CONVERGE RISPETTO A $\sigma(X, X^*)$

TEOREMA (PROPRIETÀ DELLA TOPOLOGIA DEBOLE)

1. OGNI $L \in X^*$ È CONTINUO ANCHE RISPETTO A $\sigma(X,X^*)$, ED È LA MENO FINE PER CUI SONO TUTTE CONTINUE.
2. $\sigma(X,X^*)$ È DI HAUSDORFF.
3. SE $\dim X = +\infty$ ALLORA $\sigma(X, X^*)$ <u>NON</u> È METRIZZABILE
4. SE X^* È SEPARABILE, ALLORA $\sigma(X,X^*)$ È LOCALMENTE METRIZZABILE

OSS (3) DICE CHE $\sigma(X,X^*)$ È <u>SEMPRE</u> DIVERSA DALLA TOPOLOGIA FORTE IN DIMENSIONE INFINITA, PERCHÈ LA TOPOLOGIA FORTE È SEMPRE METRIZZABILE. SU $X = \ell_1$ LA CONVERGENZA È EQUIVALENTE MA LA TOPOLOGIA È DIVERSA.

DIM (1) MOSTRIAMO CHE OGNI $L \in X^*$ È DEBOLMENTE CONTINUO, CIOÈ CHE $L^{-1}(a,b)$ È APERTO IN $\sigma(X, X^*)$. CASO BANALE. $L \equiv 0 \Rightarrow L^{-1}(a,b) = \begin{cases} X & \text{SE } a<0<b \\ \emptyset & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ $\boxed{\text{Ok}}$

$L \not\equiv 0 \Rightarrow \exists x_0 : Lx_0 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow L^{-1}(a,b) = \{x \in X : a < Lx < b\}$

$= \{x \in X : \frac{a-b}{2} < L(x-x_0) < \frac{b-a}{2}\} = U_{L, \frac{b-a}{2}}(x_0)$

APERTO DEBOLE $\boxed{\text{Ok}}$

SUPPONIAMO ORA CHE TUTTI GLI $L \in X^*$ SIANO CONTINUI CON UN'ALTRA TOPOLOGIA τ
FACCIO VEDERE CHE τ CONTIENE TUTTI GLI INTORNI DEBOLI $U_{L_1 \dots L_N, \varepsilon}(x_0)$
SE $L \in X^*$ È CONTINUO, SARANNO APERTI $L^{-1}(Lx_0 - \varepsilon, Lx_0 + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x_0 \in X$

$$\| \quad \{Lx_0 - \varepsilon < Lx < Lx_0 + \varepsilon\} = U_{L, \varepsilon}(x_0)$$

FACENDO UN'INTERSEZIONE FINITA, SARÀ APERTO ANCHE

$\{ Lx_0 - \varepsilon < L < Lx_0 + \varepsilon \} = U_{L,\varepsilon}(x_0)$

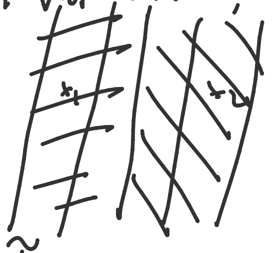
FACENDO UN'INTERSEZIONE FINITA, SARÀ APERTO ANCHE

$U_{L_1,\varepsilon}(x_0) \cap \ldots\ldots \cap U_{L_N,\varepsilon}(x_0) = U_{L_1 \ldots L_N,\varepsilon}(x_0)$.

(2) DATI $x_1 \neq x_2$, VOGLIO DUE INTORNI DEBOLI $U_1 \ni x_1$, $U_2 \ni x_2$, DISGIUNTI $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

USO LA II FORMA GEOMETRICA DI HAHN-BANACH: $\{x_1\}$ $\{x_2\}$ COMPATTI, CONVESSI, DISGIUNTI

SEPARO CON $L \in X^*$: $x_1 \in \{L < \alpha\} = U_1$ INTORNI
DEB. $x_2 \in \{L > \alpha\} = U_2$ DEBOLI DISGIUNTI



(3) SUPPONIAMO CHE $\sigma(X,X^*)$ CORRISPONDA A UNA METRICA $\tilde{d}$. IN PARTICOLARE,

$\tilde{B}_{\frac{1}{k}}(0) = \{x \in X : \tilde{d}(x,0) < \frac{1}{k}\}$ È APERTA IN $\sigma(X,X^*)$ CIOÈ CONTIENE $U_k = U_{L_1 \ldots L_N,\varepsilon}(0)$

SE $\dim X = \infty$, ALLORA $\ker L_1 \cap \ldots \cap \ker L_N \neq \emptyset$. INFATTI, CONSIDERO

$X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ SAREBBE INIETTIVA, CIOÈ $\dim X \leq N$, IMPOSSIBILE.
$x \longrightarrow (L_1 x, \ldots, L_N x)$

SOTT. LINEARE NON BANALE CONTERRÀ ELEMENTI DI NORMA ARBITRARIAMENTE GRANDE

$\exists x_k : \|x_k\| \geq k$, $x_k \in \ker L_1 \cap \ldots \cap \ker L_N \subset U_k \subset \tilde{B}_{\frac{1}{k}}(0) \Rightarrow \tilde{d}(x_k,0) \leq \frac{1}{k}$

x_k ILLIMITATA $\longrightarrow$ IMPOSSIBILE $\longleftarrow$ CIOÈ $x_k \rightharpoonup 0$

(4) CERCO UNA DISTANZA CHE CORRISPONDA A $\sigma(X,X^*)$ SULLA PALLA UNITÀ.

$\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ DENSO IN $B_1(0) \subset X^* \Rightarrow \tilde{d}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L_k(x-y)|}{2^k}$ BEN DEFINITA È UNA DISTANZA

FACCIO VEDERE CHE, RESTRINGENDOMI A $\{\|x\| \leq 1\}$, OGNI INTORNO DEBOLE CONTIENE UNA $\tilde{B}_r(x_0)$ E VICEVERSA.

CONSIDERO $U = U_{M_1 \ldots M_N,\varepsilon}(x_0)$, CERCO $\tilde{B}_r(x_0) \overset{(*)}{\subset} U$: SUPPONGO $\|M_i\|_{X^*} \leq 1$

(EVENTUALMENTE RISCALO ε) $\Rightarrow \exists\, L_{k_1} \ldots L_{k_N} : \|L_{k_i} - M_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$

PRENDO $r < \frac{\varepsilon}{2^{k_i+1}}$ $i = 1 \ldots N$, MOSTRO CHE VALE (*):

$|M_i(x-x_0)| \leq |M_i(x-x_0) - L_{k_i}(x-x_0)| + |L_{k_i}(x-x_0)|$

$\leq \|M_i - L_{k_i}\|_{X^*} (\|x\| + \|x_0\|) + 2^{k_i} \tilde{d}(x,x_0)$

$\|x\|\ \|x_0\| \leq 1 \quad < \quad \varepsilon \ldots 2^{k_i} \ldots$

$$\leq \|f_1 - L_{k_i}\|_{X^*} (\|x\| + \|x_0\|) + 2^{k_i} \tilde{d}(x, x_0)$$

$\|x\|, \|x_0\| \leq 1$
$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + 2^{k_i} \cdot 2$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} \qquad 2^{k_i} \cdot \frac{\varepsilon}{2^{k_i+1}}$$
$$= \varepsilon.$$

ORA MOSTRO CHE, DATA $\tilde{B}_r(x_0)$, $\exists\, U_{L_1 \dots L_N, \varepsilon}(x_0) \subset \tilde{B}_r(x_0)$:

PRENDO $L_1 \dots L_N$ DENSI, N GRANDE TALE CHE $\frac{1}{2^{N-1}} < \frac{r}{2}$, $\varepsilon = \frac{r}{2}$

SE $x \in U$, $\|x\| \leq 1$
$$\tilde{d}(x, x_0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{|L_k(x - x_0)|}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|L_k(x - x_0)|}{2^k}$$
$$\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\|L_k\|}{2^k} \underbrace{(\|x\| + \|x_0\|)}_{\leq 2}$$
$$\leq \frac{r}{2} + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$
$$= \frac{r}{2} + \frac{1}{2^{N-1}}$$
$$< r.$$