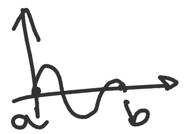
PROBLEMI AI VALORI AL BORDO

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{su } (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$



$p \in L^\infty$ $\quad p \geq \delta > 0$

$q, f \in L^1$ $\quad q \geq 0$ $\quad (p \equiv 1,\ q \equiv 0)$ $\quad -u'' = f$

$u \in W^{1,2}_0(a,b)$

GIÀ VISTO: SOL. CLASSICA $\Rightarrow$ SOL. DEBOLE

$p \in C^1$, $q, f \in C^0$

$\boxed{\text{PROP}}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{l} p \in L^\infty \\ q,f \in L^1 \end{array}\right\} \Rightarrow u \in \underset{\underset{Lip}{\parallel}}{W^{1,\infty}_0}$ $\quad \Big| \quad$ $\left.\begin{array}{l} p \in W^{1,p} \\ q,f \in L^p \end{array}\right\} \Rightarrow u' \in W^{1,p} \subset C^0 \ \Rightarrow u \in C^1$ $\quad \Big| \quad$ $\left.\begin{array}{l} p \in C^{k+1} \\ q,f \in C^k \end{array}\right\} \Rightarrow u \in C^{k+2}$

(SOL. DEBOLI $\Rightarrow$ SOL. CLASSICHE)

$\boxed{\text{DIM}}$ (pu') HA DER. DEBOLE $\underbrace{q}_{\in L^1}\underbrace{u}_{\in W^{1,2} \subset L^\infty} - \underbrace{f}_{\in L^1} \in L^1$, CIOÈ $pu' \in W^{1,1} \subset C^0 \subset L^\infty$

$\Downarrow$

$u' = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\in L^\infty} \underbrace{pu'}_{\in L^\infty} \in L^\infty$ CIOÈ $u \in W^{1,\infty}_0$

PERCHÉ $p \geq \delta > 0$

$\boxed{L^p}$

COME PRIMA, $(pu')' = \underbrace{q}_{\in L^p}\underbrace{u}_{\in L^\infty} - \underbrace{f}_{\in L^p} \in L^p$ CIOÈ $pu' \in W^{1,p}$

$u' = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\in W^{1,p}} \underbrace{pu'}_{\in W^{1,p}} \in W^{1,p}$ (PRODOTTO DI $W^{1,p}$ È $W^{1,p}$, VISTO L'ULTIMA VOLTA)

PERCHÉ $p \in W^{1,p}$ (VISTO L'ULTIMA VOLTA)
$p \geq \delta > 0$

$\boxed{C^k}$ PER INDUZIONE:

$k=0$ $\quad (pu')' = qu - f \in C^0$ $\quad (u \in W^{1,2}_0 \subset C^0)$ $\quad \Rightarrow pu' \in C^1$

$u' = \underbrace{\frac{1}{p}}_{\in C^1} \cdot \underbrace{pu'}_{\in C^1} \in C^1 \quad \Rightarrow u \in C^2.$

$k \Rightarrow k+1$. $\quad \left.\begin{array}{l} p \in C^{k+1} \\ q,f \in C^k \end{array}\right\} \Rightarrow u \in C^{k+1}$ PER IP. INDUTTIVA:

$(pu')' = \underline{q}\,\underline{u} - \underline{f} \in C^k \Rightarrow pu' \in C^{k+1} \Rightarrow u' = \frac{1}{p} \cdot pu' \in C^{k+1} \Rightarrow u \in C^{k+2}.$

$\cancel{u'(a)=0}$ $\quad u(b) = 0$

$u(a) = 0$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\quad \begin{array}{l} p \equiv 1 \\ q \equiv 0 \end{array}$ $\quad \begin{cases} -u'' = f & \text{su } (a,b) \\ \underset{\sim}{u(a) = u(b) = 0} \end{cases}$

$\Rightarrow u(x) = -\int^x \left(\int^y f \right) dy + C_1 + C_2 x$ $\quad C_1, C_2$ TALI CHE

$u(a)=0$

$$\Rightarrow u(x) = -\int_a^x\left(\int_a^y f\right)dy + C_1 + C_2 x \qquad C_1, C_2 \text{ TALI CHE } u(a)=u(b)=0$$

$$u(a) = C_1 + C_2 a = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad \exists! \text{ SOLUZIONE } C_1, C_2$$

$$u(b) = -\int_a^b\left(\int_a^y f\right)dy + C_1 + C_2 b = 0$$

$$u(x) = \frac{x-a}{b-a}\int_a^b\left(\int_a^y f\right)dy - \int_a^x\left(\int_a^y f\right)dy$$

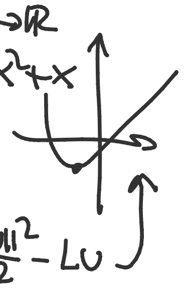
UNICA SOLUZIONE DI $\begin{cases} u'' = f \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$

TEOREMA (DI ESISTENZA E UNICITÀ DI SOL. DEBOLI)

IL PROBLEMA (★) $\begin{cases} (-pu')' + qu = f & \text{SU } (a,b) \\ u(a)=u(b)=0 \end{cases}$ HA UN'UNICA SOLUZIONE.

IDEA: SOLUZIONI SONO "PUNTI CRITICI" DI UN FUNZIONALE $F: W_0^{1,2}((a,b)) \to \mathbb{R}$.
L'EQ. DIFF. È LA "DERIVATA" DI F.

VOGLIO RISOLVERE $2x+1=0$. $2x+1$ È LA DERIVATA DI $F(x) = x^2+x$ $\quad F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



F HA UN PUNTO DI MINIMO, CHE RISOLVERÀ $F'(x)=0$
$\quad \overset{\shortparallel}{2x+1}$

$F(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - Lu$

LEMMA
DEFINIAMO, PER $u \in W_0^{1,2}((a,b))$, $F(u) = \int_a^b \left(\frac{p}{2}u'^2 + \frac{q}{2}u^2 - fu\right)$ $\quad F: W_0^{1,2} \to \mathbb{R}$

SE u È UN PUNTO DI MINIMO PER F ($F(u) \leq F(v)$ $\forall v \in W_0^{1,2}((a,b))$)
ALLORA u RISOLVE (★).

DIM FISSO $\varphi \in C_0^1$, VOGLIO $\int pu'\varphi' + qu\varphi = \int f\varphi$.
POICHÉ u È PUNTO DI MINIMO, $F(u) \leq F(u+t\varphi)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
CIOÈ $g(t) = F(u+t\varphi)$ HA UN MINIMO IN $t=0 \Rightarrow g'(0)=0$!

$$g(t) = \int \frac{p}{2}(u'+t\varphi')^2 + \frac{q}{2}(u+t\varphi)^2 - f(u+t\varphi)$$

$$= \int\left(\frac{p}{2}u'^2 + \frac{q}{2}u^2 - fu\right) + t\int\left(pu'\varphi' + qu\varphi - f\varphi\right) + t^2\int\left(\frac{p}{2}\varphi'^2 + \frac{q}{2}\varphi^2\right)$$

$$= \underbrace{\int \left(\frac{p}{2} u'^2 + \frac{q}{2} u^2 - f u\right)}_{A} + t \underbrace{\int \left(p u' \varphi' + q u \varphi - f \varphi\right)}_{B} + t^2 \underbrace{\int \left(\frac{p}{2} \varphi'^2 + \frac{q}{2} \varphi^2\right)}_{C}$$

$$= A + Bt + Ct^2$$

$0 = g'(0) = B = \int p u' \varphi' + q u \varphi - f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1 \Rightarrow u$ È SOL. DEBOLE.

LEMMA SE $\{u_n\}$ È LIMITATA IN $W_0^{1,2}((a,b))$, ALLORA (A MENO DI ESTRATTE):

$\exists\, u \in W_0^{1,2}((a,b))$: $u_n \rightharpoonup u$ IN $W_0^{1,2}((a,b))$

$u_n \to u$ IN $L^\infty((a,b))$ (UNIFORMEMENTE)

DIM POICHÉ u_n È LIMITATA, A MENO DI ESTRATTE $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ (BANACH-ALAOGLU)

MA $W_0^{1,2}$ È HILBERT $\Rightarrow$ RIFLESSIVO DUNQUE $u_n \rightharpoonup u$. POI, DAL TEO. IMMERSIONE, $W_0^{1,2} \hookrightarrow L^\infty$ IN MODO COMPATTO, DUNQUE $\{u_n\}$ LIMITATA $\Rightarrow u_n \to v$ IN L^∞

DEVO FAR VEDERE $u = v$. SO CHE $L u_n \to L u \quad \forall L \in (W_0^{1,2})^*$, IN PARTICOLARE $L : u \mapsto \int_a^b u f \quad \forall f \in L^1 \Rightarrow \int u_n f \to \int u f \quad \forall f \in L^1$

$$\left|\int u_n f - \int v f\right| \le \int |u_n - v| |f| \le \|f\|_{L^1} \|u_n - v\|_{L^\infty} \to 0 \Rightarrow \int u_n f \to \int v f$$

MA ALLORA $\int u f = \int v f \quad \forall f \in L^1 \Rightarrow u = v$.

DIM TEO. ESISTENZA E UNICITÀ

(UNICITÀ) SUPPONIAMO $\exists\, u, v$ SOLUZIONI, CIOÈ TALI CHE

$$\int p u' w' + q u w = \int f w = \int p v' w' + q v w \quad \forall w \in W_0^{1,2}((a,b))$$

$$\int p (u' - v') w' + q (u - v) w = 0 \quad \text{SCELGO } w = u - v \Rightarrow \underbrace{\int p (u' - v')^2 + q (u - v)^2}_{\|u\|^2 =\ \ge\ \delta \int (u' - v')^2} = 0$$

$\Rightarrow (u - v)' \equiv 0 \Rightarrow u - v \equiv 0$

DEVE ESSERE $u - v \equiv 0$, CIOÈ $u \equiv v$ UNICA SOL.

(ESISTENZA) $\|u\|^2_{W_0^{1,2}} = \int p u'^2 + q u^2$ È NORMA EQUIVALENTE PER POINCARÉ

FACCIO VEDERE CHE $F(u) = \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}}}{2} - \int f u$ HA UN PUNTO DI MINIMO.

FACCIO VEDERE CHE $F(u) = \underbrace{\frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}}}{2}} - \underline{\int fu}$ HA UN PUNTO DI MINIMO.

ANZITUTTO, F È LIMITATO DAL BASSO:

$$\frac{t^2}{2} - Ct \geq C'$$

$$F(u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HÖLDER}}}{\geq} \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}}}{2} - \|f\|_{L^1}\|u\|_{L^\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TEO. IMMERSIONE}}}{\geq} \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}}}{2} - C\|f\|_{L^1}\|u\|_{W_0^{1,2}} \geq C'$$

PRENDO $\{u_n\}$ SUCC. MINIMIZZANTE, CIOÈ T.C. $F(u_n) \to \inf_{W_0^{1,2}} F$

$\{u_n\}$ LIMITATA PERCHÉ SE $\|u_n\| \to \infty$, ALLORA $F(u_n) \geq \frac{\|u_n\|^2}{2} - C\|u_n\| \to \infty$

APPLICO IL LEMMA A u_n: $u_n \rightharpoonup u$ IN $W_0^{1,2}$

$u_n \to u$ IN L^∞

$$\left|\int u_n f - \int u f\right| \leq \int |f||u_n - u| \leq \|f\|_{L^1}\|u_n - u\|_{L^\infty} \to 0$$

SEMICONTINUITÀ DI $\|\cdot\|$ RISPETTO A $\rightharpoonup$: $\frac{\|u\|^2}{2} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|^2}{2}$

$$F(u) = \frac{\|u\|^2_{W_0^{1,2}}}{2} - \underline{\int fu} \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\|u_n\|^2_{W_0^{1,2}}}{2} - \int f u_n\right) = \liminf_{n\to\infty} F(u_n) = \inf_{W_0^{1,2}} F$$

$F(u) \leq \inf_{W_0^{1,2}} F \Rightarrow$ DEV'ESSERE $=$, CIOÈ $F(u) = \min_{W_0^{1,2}} F$

$\Rightarrow F$ HA UN MINIMO CHE È SOL. DEBOLE.

$\boxed{\text{OSS}}$ 1) DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA DEL TEO. ESISTENZA E UNICITÀ:

$L: v \to \int_a^b fv$ FUNZ. LINEARE CONTINUO SU $W_0^{1,2}((a,b))$. DAL TEO. RIESZ-FRÉCHET,

$$\exists!\, u \in W_0^{1,2}: \underset{\substack{\| \\ \int fv}}{Lv} = \underset{\substack{\| \\ \int pu'v' + quv}}{(u,v)_{W_0^{1,2}}} \quad \forall v \in W_0^{1,2}$$

, CIOÈ u È SOL. DEBOLE

2) LA DIM. "LUNGA" DEL TEOREMA FUNZIONA PER EQ. DIFF. MOLTO PIÙ GENERALI.

$$F(u) = \int A(x, u'(x)) + V(x, u(x)) \qquad \left(\begin{array}{l} A(x,t) = \frac{p(x)}{2}t^2 \\ V(x,t) = \frac{q(x)}{2}t^2 - f(x)t \end{array}\right)$$

BASTA AVERE $\frac{t^2}{C} \leq A(x,t) \leq Ct^2$ $\qquad A, V \in C^1([a,b] \times \mathbb{R})$

$V(x,t) \geq -C(1 + |t|^q)$ $\quad q < 2$

$\Rightarrow$ ESISTENZA

UNICITÀ: DEVO AVERE A, V CONVESSE.

$$\begin{cases} \left(-\partial_t A(x,u(x))\right)' + \partial_t V(x,u(x)) = 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$