TEOREMA DI RIESZ-FRÉCHET

SIA H UNO SP. DI HILBERT

ALLORA $\exists\, \Phi : H \to H^*$ ISOMETRIA SURIETTIVA

$$h \to L_h : x \to (x,h)$$

OSS IL DIFFICILE È LA SURIETTIVITÀ, CIOÈ OGNI $L \in H^*$ È DEL TIPO $L = L_h$

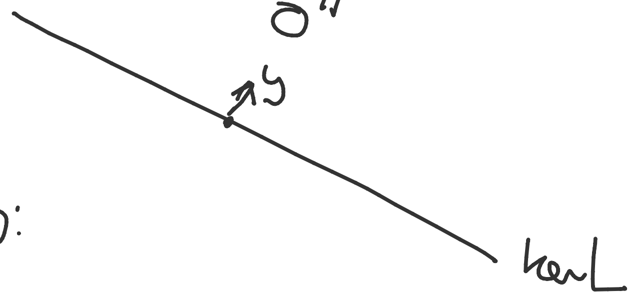
DIM COSTRUIAMO $\Psi : H^* \to H$ INVERSA DI Φ

DATO $L \in H^*$, SE $L = 0$, PONGO $\Psi(L) := 0$

SE $L \neq 0$, $\exists\, x \in H$ PER CUI $Lx \neq 0$ CIOÈ $\ker L \subsetneq H$

ALLORA $(\ker L)^\perp \neq \{0\}$, DATO $y \in (\ker L)^\perp$ $\neq 0$

PONGO $\Psi(L) = \frac{Ly}{\|y\|^2}\, y$



$(x, \Psi(L)) = Lx$, VERIFICO:

$$(x, \Psi(L)) - Lx = \left(x, \frac{Ly}{\|y\|^2} y\right) - Lx = \frac{Ly(x,y) - Lx(y,y)}{\|y\|^2}$$

SICCOME $y \in (\ker L)^\perp$, $Ly(x,y) - Lx(y,y) = (y, (Ly)x - (Lx)y) = 0$

PERCHÈ $L((Ly)x - (Lx)y) = Ly \cdot Lx - Lx \cdot Ly = 0$

$\Rightarrow (x, \Psi(L)) = Lx$

VERIFICHIAMO L'UNICITÀ: $Lx = (x, \Psi_1(L)) = (x, \Psi_2(L))$

$\Rightarrow (x, \Psi_1(L) - \Psi_2(L)) = 0 \quad \forall x$, SCELGO $x = \Psi_1(L) - \Psi_2(L)$

$\Rightarrow 0 = \|\Psi_1(L) - \Psi_2(L)\|^2 = 0 \Rightarrow \Psi_1(L) = \Psi_2(L)$

LINEARITÀ: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $L, M \in H^*$ $\forall x \in H$

$(x, \Psi(\alpha L + \beta M)) = (\alpha L + \beta M)x = \alpha Lx + \beta Mx = \alpha (x, \Psi(L))$

$(x, \psi(\alpha L+\beta M)) = (\alpha L+\beta M)x = \alpha Lx+\beta Mx = \alpha(x,\psi(L)) + \beta(x,\psi(M)) = (x, \alpha\psi(L)+\beta\psi(M)) \Rightarrow \psi(\alpha L+\beta M) = \alpha\psi(L)+\beta\psi(M)$

SURIETTIVITÀ: DATO $h \in H$, $L_h \in H^*$ VERIFICA $\psi(L_h) = h$

VERIFICO CHE ψ È ISOMETRIA ($\Rightarrow$ CONTINUA E INIETTIVA)

VOGLIO MOSTRARE $\|\psi(L)\|_H = \|L\|_{H^*}$

$$\|\psi(L)\| = \left|\frac{Ly}{\|y\|^2}\right| \|y\| \leq \frac{\|L\| \cancel{\|y\|}}{\|y\|^{\cancel{2}}} \cancel{\|y\|}$$

$$\|L\| = \sup \frac{|Lx|}{\|x\|} = \sup \frac{|(x, \psi(L))|}{\|x\|} \leq \frac{\cancel{\|x\|}\,\|\psi(L)\|}{\cancel{\|x\|}}.$$

IDEA: SCRIVERE OGNI VETTORE $x \in H$ COME COMBINAZIONE LINEARE (EVENTUALMENTE "INFINITA") DI ALCUNI VETTORI "SPECIALI"

$\boxed{\text{DEF}}$ UN SOTTOINSIEME $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ DI UNO SP. DI HILBERT H SI DICE SISTEMA ORTONORMALE SE

$$(e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} = \delta_{\alpha\beta}$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ 1) $H = \mathbb{R}^N$, $\{e_k\}_{k=1\ldots N}$ BASE STANDARD È SISTEMA ORTONORM.

ANALOGAMENTE, $H = \ell_2$, $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ BASE STANDARD INFINITO-DIMENSIONALE

$$e_h(k) = \begin{cases} 1 & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases}$$

PIÙ IN GENERALE, PRENDO UNO SPAZIO MISURA $(X, \mathcal{P}(X), \#)$

… SPAZIO MISURA $(X, \mathcal{P}(X), \#)$

$L^2(\#) = \{ f : X \to \mathbb{R} ; f(x) \neq 0$ PER AL PIÙ NUMERABILI x

E $\sum_{x} f(x)^2 < +\infty \}$

UN SISTEMA ORTONORMALE È $\{ \chi_{\{x\}} \}_{x \in X}$

(2) $H = L^2((-\pi, \pi))$, UN SISTEMA ORTONORMALE È $($

$$\left\{ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$\boxed{\text{OSS}}$ ① DATI $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ NUMERABILI VETTORI LIN. INDIP.

COSTRUISCO UN SISTEMA ORTONORMALE: PONGO

$$e_n' := e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(e_n, e_i)}{\|e_i\|^2} e_i = P e_n \text{ PROIEZIONE SU } \operatorname{span}\{e_1 \dots e_{n-1}\}^{\perp}$$

$$e_n'' := \frac{e_n'}{\|e_n'\|} \Rightarrow \{e_n''\} \text{ È SISTEMA ORTONORMALE.}$$

② DATO $\{e_\alpha\}$ SISTEMA ORTONORMALE SU UN QUALSIASI H

$\|e_\alpha\| = 1$, $\|e_\alpha - e_\beta\| = \sqrt{2}$, QUINDI $\{e_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

È LIMITATA MA NON HA ESTRATTE DI CAUCHY

$\Rightarrow$ NO ESTRATTE CONVERGENTI

$\Rightarrow$ SE $\dim H = \infty$ CI SONO <u>SUCCESSIONI LIMITATE SENZA ESTRATTE CONVERGENTI</u>.

$\boxed{\text{DEF}}$ DATO $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ SISTEMA ORTONORMALE SU H,

$\forall x \in H$ DEFINIAMO I <u>COEFFICIENTI DI FOURIER</u>

DI x RISPETTO A $\{e_\alpha\}$ COME $\{(x, e_\alpha)\}$

DEFINIAMO LA <u>SERIE DI FOURIER</u> DI x RISPETTO A $\{e_\alpha\}$

COME $\sum_\alpha (x, e_\alpha) e_\alpha$.

(COME È DEFINITA? CONVERGE?)

$\boxed{\text{PROP.}}$ DISUGUAGLIANZA DI BESSEL

DATO $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ SIST. ORTONORMALE SU H E $x \in H$

PER OGNI $\alpha_1 \dots \alpha_N$ VALE $\sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i})^2 \leq \|x\|^2$

DIM

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2 = \|x\|^2 + \left\| \sum_i (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right\|^2$$

$$- 2 \left(x, \sum_i (x, e_{\alpha_i}) e_{\alpha_i} \right) = \|x\|^2 + \sum_{i,j} (x, e_{\alpha_i})(x, e_{\alpha_j}) \underbrace{(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j})}_{= \delta_{ij}}$$

$$- 2 \sum_i (x, e_{\alpha_i})^2 = \|x\|^2 + \sum (x, e_{\alpha_i})^2 - 2 \sum (x, e_{\alpha_i})^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_i (x, e_{\alpha_i})^2 \Rightarrow \|x\|^2 \geq \sum (x, e_{\alpha_i})^2.$$

OSS ① FISSATO N, GLI α PER CUI $|(x, e_\alpha)| \geq \frac{1}{N}$ SONO AL PIÙ $N\|x\|$. (NUMERO FINITO)

$\Rightarrow$ METTENDO INSIEME TUTTI GLI $N \in \mathbb{N}$, $(x, e_\alpha) \neq 0$ PER AL PIÙ NUMERABILI N. DUNQUE LA SERIE DI FOURIER HA AL PIÙ NUMERABILI ADDENDI $\neq 0$

$\Rightarrow$ BEN DEFINITA COME LIMITE DI SOMME FINITE.

② LE SERIE DI FOURIER CONVERGONO. INFATTI:

$$x_n := \sum_{i=1}^{n} \underline{(x, e_{\alpha_i})}\, e_{\alpha_i} \quad (\alpha_i \text{ TALI CHE } (x, e_{\alpha_i}) \neq 0)$$

x_n È DI CAUCHY ⇒ CONVERGE. PERCHÉ

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} (x, e_{\alpha_i})^2 \quad \text{È LA CODA DI} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_{\alpha_i})^2$$

CHE È CONVERGENTE PER BESSEL.

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$

$\boxed{\text{DEF}}$ UN SISTEMA ORTONORMALE $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ SI DICE COMPLETO SE $H = \overline{\text{SPAN}\{e_\alpha\}}$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$ TUTTI GLI ESEMPI PRECEDENTI SONO SISTEMI ORTONORMALI COMPLETI.

SU $\mathbb{R}^N$ È OVVIO.

$H = \ell_2$ $\{e_n\}$ BASE STANDARD INFINITO-DIMENSIONALE

DATO $x \in \ell_2$, LO APPROSSIMO $x_n = (x(1), \dots, x(n), 0 \dots) \in \text{SPAN}\{e_i\}$

FACCIO VEDERE CHE x_n È DI CAUCHY.

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} x(i)^2 \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$ PERCHÉ È LA CODA DI

$\sum_{i=1}^{\infty} x(i)^2$ CHE CONVERGE A $\|x\|^2$. ANALOGAMENTE PER $L^2(\#)$

NEL CASO "TRIGONOMETRICO" È BEN NOTO.