TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DEI CHIUSI CONVESSI)

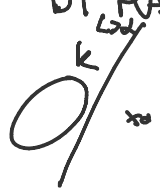
UN INSIEME CONVESSO $K \subset X$ È CHIUSO $\Leftrightarrow$ DEBOLMENTE CHIUSO

DIM ($\Leftarrow$) OVVIA

($\Rightarrow$) FACCIAMO VEDERE CHE $X \setminus K$ È APERTO IN $\sigma(X,X^*)$, CIOÈ OGNI $x_0 \in X \setminus K$ È INTERNO RISPETTO ALLA TOP. DEBOLE. APPLICO LA II FORMA GEOMETRICA DI HAHN-BANACH E SEPARO $\{x_0\}$, K STRETTAMENTE

$\{x_0\} \subset \{L<\alpha\}$

$K \subset \{L>\alpha\}$

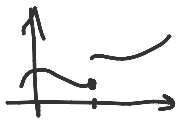


$\{L<\alpha\}$ È INTORNO DEBOLE DI x_0 PERCHÉ CONTIENE $\{|Lx - Lx_0| < \varepsilon\}$ INTORNO FONDAMENTALE

COROLLARIO UNA FUNZIONE CONVESSA $f: X \to \mathbb{R}$ È INFERIORMENTE SEMI-CONTINUA $\Leftrightarrow$ È INFERIORMENTE SEMI CONT. RISPETTO A $\sigma(X,X^*)$

($f^{-1}((-\infty,c])$ È CHIUSA $\forall c \in \mathbb{R}$, EQUIVALENTEMENTE $x_n \to x \Rightarrow f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$)

IN PARTICOLARE, LA NORMA È INFERIORMENTE SEMICONTINUA IN $\sigma(X,X^*)$ CIOÈ $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\| \le \liminf \|x_n\|$.

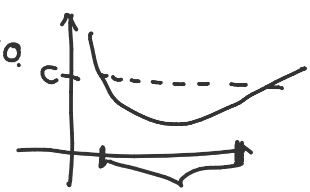


OSS 1) EQUIVALENTEMENTE, f CONCAVA È SUPERIORMENTE S.C $\Leftrightarrow$ SUPERIORMENTE S.C. RISPETTO A $\sigma(X,X^*)$.

2) PUÒ VALERE $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\| < \liminf \|x_n\|$: ABBIAMO VISTO $e_n \rightharpoonup 0$ $\quad \|0\| = 0 < 1 = \liminf \|e_n\|$

IN PARTICOLARE, LA SFERA $\{\|x\|=1\}$ NON È CHIUSA DEBOLE. LA SUA CHIUSURA DEBOLE È LA PALLA $\{\|x\| \le 1\}$.

DIM PRENDO f CONVESSA. ALLORA $f^{-1}((-\infty,c])$ È CONVESSO.



$f^{-1}(-\infty,c]$

f È INF. SEMI CONT. $\Leftrightarrow$ $f^{-1}((-\infty,c])$ CHIUSO $\forall c \in \mathbb{R}$

TEOREMA $\to$ $\Leftrightarrow$ $f^{-1}((-\infty,c])$ CHIUSO DEBOLE

$\Leftrightarrow$ f È INF. SEMI CONT. DEBOLE

CONSIDERO $\{L_n\}$ SUCCESSIONE IN X^*. CONV. DEBOLE: $\Lambda L_n \to \Lambda L \quad \forall \Lambda \in X^{**}$

CONSIDERO $\{L_n\}$ SUCCESSIONE IN X^*. CONV. DEBOLE: $\Lambda L_n \to \Lambda L_0 \quad \forall \Lambda \in X^{**}$

CONSIDERIAMO SOLO ALCUNI ELEMENTI DI X^{**} $\Lambda: L \to Lx$.

DEFINIZIONE SIA X^* IL DUALE DI UNO SP. NORMATO, $\{L_n\} \subset X^*$, $L_0 \in X^*$.

L_n <u>CONVERGE DEBOLMENTE-*</u> A L_0 SE $L_n x \to L_0 x \quad \forall x \in X$

NOTAZIONE: $L_n \xrightarrow{*} L_0$

OSSERVAZIONE

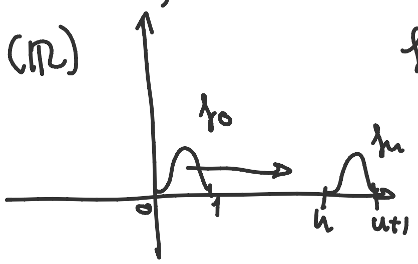
1. SE $L_n \rightharpoonup L_0$ ALLORA $L_n \xrightarrow{*} L_0$
2. SE $L_n \xrightarrow{*} L_0$ ALLORA $\{L_n\}$ È LIMITATA
3. SE X È RIFLESSIVO ALLORA $L_n \rightharpoonup L_0 \iff L_n \xrightarrow{*} L_0$.

ESEMPIO ① $\{e_n\}$ GIÀ VISTO CHE $e_n \rightharpoonup 0$ IN ℓ_p $p \in (1, +\infty)$. POICHÉ ℓ_p È RIFLESSIVO, $e_n \xrightarrow{*} 0$. $e_n \not\rightharpoonup 0$ IN ℓ_1, MA $e_n \xrightarrow{*} 0$ IN ℓ_1. FACCIO VEDERE

$$\sum_k y(k)\, e_n(k) \to 0 \quad \forall y \in c_0: \quad \sum_k y(k)\, e_n(k) = y(n), \quad y(n) \to 0 \text{ PERCHÈ } y \in c_0$$

ANALOGAMENTE, $e_n \xrightarrow{*} 0$ IN ℓ_∞.

② $L^\infty(\mathbb{R})$



$f_n \overset{\text{def}}{=} f_0(x-n)$

$f_0 \in C_0([0,1])$

$\|f_n\|_{L^\infty} = \|f_0\|_{L^\infty} \not\to 0$ MA $f_n \xrightarrow{*} 0$

INFATTI: PRENDO $g \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_n g\right| = \left|\int_n^{n+1} f_0 g\right| \leq \|f_0\|_\infty \int_n^{n+1} |g| \to 0 \text{ PERCHÈ } g \in L^1$$

PER LO STESSO MOTIVO, $f_n \rightharpoonup 0$ IN L^p $p \in (1, +\infty)$

MA $f_n \not\rightharpoonup 0$ IN L^1 PERCHÉ SE PRENDO $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \equiv 1$.

$$\int_{\mathbb{R}} f_n g = \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f_0 \not\to 0.$$

DEFINIZIONE LA <u>TOPOLOGIA DEBOLE *</u> SU X^* È DATA DAGLI INTORNI

$$U_{x_1 \dots x_N, \varepsilon}(L_0) = \{L \in X^* : |Lx_1 - L_0 x_1| < \varepsilon, \dots, |Lx_N - L_0 x_N|\} \quad L_0 \in X^*, \ \varepsilon > 0, \ x_1 \dots x_N \in X$$

NOTAZIONE: $\sigma(X^*, X)$

OSSERVAZIONE ① SE X È RIFLESSIVO, $\sigma(X^*,X)$ È LA TOP. DEBOLE $\sigma(X^*,X^{**})$

② $L_n \xrightarrow{*} L_0$ EQUIVALE ALLA CONVERGENZA RISPETTO A $\sigma(X^*,X)$

③ OGNI $\Lambda \in X^{**}$ DEL TIPO $\Lambda: L \to Lx$ È CONTINUO IN $\sigma(X^*,X)$ E $\sigma(X^*,X)$ È LA MENO FINE PER CUI QUESTO È VERO

④ $\sigma(X^*,X)$ È HAUSDORFF, <u>NON</u> METRIZZABILE, LOCALMENTE METRIZZABILE SE X SEPARABILE

PROPOSIZIONE

LA NORMA È INFERIORMENTE SEMICONTINUA RISPETTO A $\sigma(X^*,X)$, CIOÈ:

$L_n \xrightarrow{*} L_0$, $\|L_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|$

DIM SUPPONIAMO $L_n \xrightarrow{*} L_0$ E FISSIAMO $x \in X$. ALLORA $L_n x \to L_0 x$

$L_0 x \leftarrow L_n x \leq \|L_n\| \|x\| \implies \frac{L_0 x}{\|x\|} \leq \liminf_{n\to\infty} \|L_n\|$, PASSO ALL' $\inf_{x\neq 0}$ $\|L_0\| \leq \liminf \|L_n\|$

PROPOSIZIONE UN FUNZIONALE $\Lambda \in X^{**}$ È CONTINUO RISPETTO A $\sigma(X^*,X)$ SE E SOLO SE $\Lambda: L \to Lx$ PER QUALCHE $x \in X$.

DIM ⇐ GIÀ VISTO.

⇒ SUPPONIAMO Λ CONTINUO IN $\sigma(X^*,X)$ IN $L=0$ $\implies \underline{\{L \in X^*: -1 < \Lambda L < 1\}} \supset U_{x_1,\dots,x_N,\varepsilon}(0)$

$U_{x_1,\dots x_N,\varepsilon}(0) = \{|Lx_1| < \varepsilon, \dots, |Lx_N| < \varepsilon\} \supset \underline{\{Lx_1 = \dots = Lx_N = 0\}}$

INTORNO DEBOLE *

RISCALO DI $t>0$ $\implies \{-t < \Lambda < t\} \supset \{Lx_1 = \dots = Lx_N = 0\}$

$t \to 0$ $\implies \boxed{\{\Lambda = 0\} \supset \{Lx_1 = \dots = Lx_N = 0\}}$

$X^* \xrightarrow{A} \mathbb{R}^{N+1}$ $\qquad$ $\mathrm{ran}(A) \not\ni (1, 0, \dots, 0)$

$L \to (\Lambda L, \underline{Lx_1, \dots Lx_N})$ $\qquad$ ⇓

$\underline{\mathrm{ran}\, A \subset \{y \in \mathbb{R}^{N+1}: c_0 y_0 + c_1 y_1 + \dots + c_N y_N\}}$ $c_0 \neq 0$

$c_0 \Lambda L + c_1 L x_1 + \dots + c_N L x_N = 0 \;\; \forall x \iff \Lambda L = L\left(-\frac{c_1}{c_0} x_1 - \dots - \frac{c_N}{c_0} x_N\right)$

Λ È DEL TIPO $\Lambda: L \to Lx$.

COROLLARIO UN IPERPIANO $\{\Lambda = a\}$ SU X^* È CHIUSO IN $\sigma(X^*,X)$

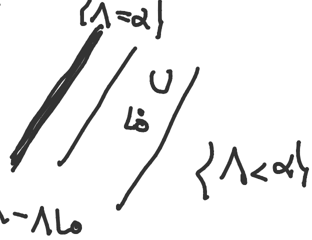
SE E SOLO SE $\Lambda : L \to Lx$ PER $x \in X$.

IN PARTICOLARE, SE Λ NON È DI QUESTO TIPO, GLI IPERPIANI SONO CONVESSI DEBOLMENTE CHIUSI MA <u>NON</u> DEBOLMENTE* CHIUSI

<u>DIM</u> ($\Leftarrow$) OVVIO PERCHÉ Λ È $\sigma(X^*, X)$ - CONTINUA

($\Rightarrow$) SUPPONIAMO CHE H SIA CHIUSO IN $\sigma(X^*, X)$, CIOÈ CHE OGNI $L_0 \in X \setminus H$ SIA DEBOLMENTE* INTERNO $\Rightarrow \exists\, U = U_{x_1 \dots x_N, \varepsilon}(L_0)$, TALE CHE $L_0 \in U \subset \{\Lambda < \alpha\}$ (A MENO DI UN SEGNO)

$$\underline{|L x_i - L_0 x_i| < \varepsilon} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Lambda(L - L_0) < \overbrace{\alpha - \Lambda L_0}^{>0 \text{ PERCHÉ } \Lambda L_0 < \alpha} \\ \Lambda(L_0 - L) > \Lambda L_0 - \alpha \end{array}\right| \Rightarrow \underline{|\Lambda(L - L_0)| < \alpha - \Lambda L_0}$$



RISCALANDO, $\{|\Lambda| < \delta\} \supset U_{x_1 \dots x_N, \varepsilon'}(0) \quad \forall \delta > 0 \Rightarrow \Lambda$ CONTINUO IN 0 RISPETTO A $\sigma(X^*, X)$