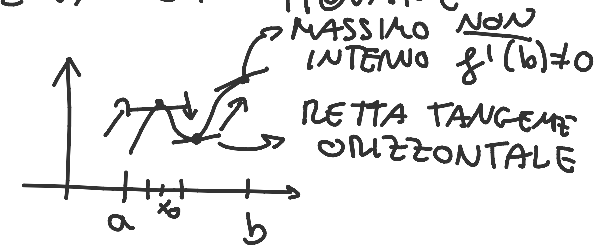
APPLICAZIONE DELLE DERIVATE: TROVARE

MASSIMI E MINIMI



DEFINIZIONE (MINIMO RELATIVO)

x_0 È PUNTO DI MASSIMO RELATIVO SE $\exists\, \delta > 0$ TALE CHE

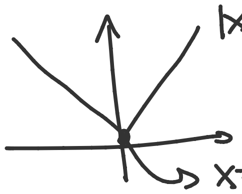
$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \overset{*}{\Rightarrow} f(x) \leq f(x_0)$

$\big(f(x) \geq f(x_0)\big)$

TEOREMA DI FERMAT SE $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ HA UN MASSIMO RELATIVO (O MINIMO RELATIVO) IN x_0 E: 1) f DERIVABILE IN x_0

2) $x_0 \in (a,b)$ È <u>INTERNO</u>

ALLORA $f'(x_0) = 0$.



$|x| = f(x)$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$x = 0$ È MINIMO MA f NON DERIVABILE IN 0

DIM SE x È MAX RELATIVO,

$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ SE $|h| < \delta$

$(h = x - x_0)$

$h > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$

PASSO AL $\lim\limits_{h \to 0} \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

$h < 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$, PASSO AL $\lim\limits_{h \to 0} \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ $\Rightarrow \boxed{f'(x_0) = 0}$

(POSSO PRENDERE SIA $h > 0$ CHE $h < 0$ PERCHÉ x_0 È INTERNO)

COME CAPISCO SE x_0 È MAX OPPURE MIN? VEDO SE f CRESCE O DECRESCE

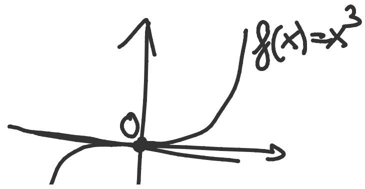
SE x_0 È MAX, ALLORA f CRESCE PRIMA DI x_0, DECRESCE DOPO x_0

SE x_0 È MIN, ALLORA f DECRESCE PRIMA DI x_0, CRESCE DOPO x_0

SE f CRESCE SIA PRIMA CHE DOPO x_0, x_0 NON È MAX NÉ MIN

SE f DECRESCE " " " " NÉ MAX NÉ MIN

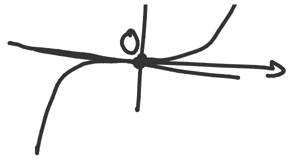
<u>ESEMPIO</u> $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$ $\quad f'(0) = 0$



$x_0 = 0$ NON È MAX NÉ MIN PERCHÉ:

$x > 0 \Rightarrow f(x) > 0 = f(0)$

$x_0 = 0$ NON È MAX NÉ MIN PERCHÉ:

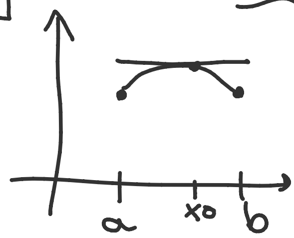


$x > 0 \Rightarrow f(x) > 0 = f(0)$

$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0 = f(0)$

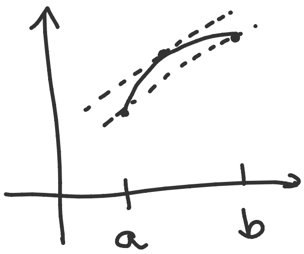
TEOREMA DI ROLLE

SE f È CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b) E $f(a) = f(b)$



ALLORA $\exists\, x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $f'(x_0) = 0$

TEOREMA DI LAGRANGE



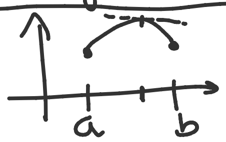
SE f È CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN (a,b) ALLORA $\exists\, x_0 \in (a,b)$ TALE CHE

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

(GENERALIZZA IL TEO. DI ROLLE)

DIM. TEO. DI ROLLE

DAL TEO. DI WEIERSTRASS, $\exists\, x_1, x_2$ PUNTI DI MAX/MIN CIOÈ $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.



$x_1 = a$ OPPURE b NON INTERNO

x_2 INTERNO $f'(x_2) = 0$

CASO 1 $x_1 = a$, $x_2 = b$ (O VICEVERSA) f È COSTANTE CIOÈ $f(x) = f(a)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$

POSSO PRENDERE QUALUNQUE $x_0 \in (a,b)$.

CASO 2 ALMENO UNO TRA x_1 E x_2 È INTERNO, DICIAMO x_1. ALLORA x_1 È UN MINIMO LOCALE INTERNO $\Rightarrow$ DAL TEO. FERMAT OTTENGO $f'(x_1) = 0$

IDEM SE x_2 È MASSIMO LOCALE INTERNO $\Rightarrow f'(x_2) = 0$. (BASTA PORRE $x_0 = x_1$ OPPURE $x_0 = x_2$)

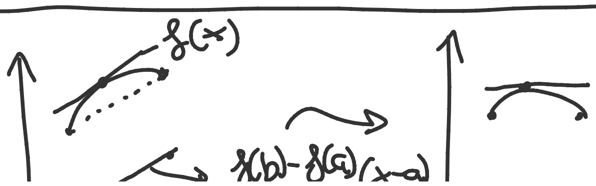
DIM. LAGRANGE

DEFINISCO $g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right)(x-a) \Rightarrow g(a) = f(a)$, $g(b) = f(a)$

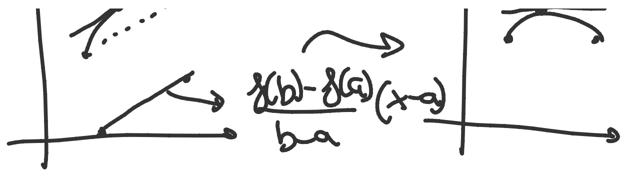
POSSO APPLICARE A g IL TEOREMA DI ROLLE:

$\exists\, x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $g'(x_0) = 0$ MA $g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

CIOÈ $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.



$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$



$b-a \qquad (x-a)$

CRITERIO DI MONOTONIA

SE f È CONTINUA IN $[a,b]$, DERIVABILE IN (a,b)

ALLORA f È CRESCENTE IN $(a,b) \overset{\star}{\iff} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

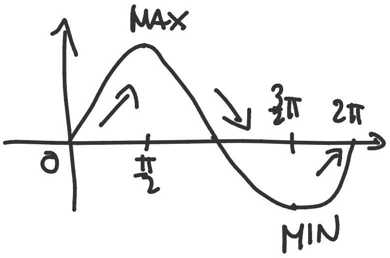
f È DECRESCENTE IN $(a,b) \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

ESEMPI $f(x) = e^x, \ln x, \ x^n \ \binom{n>0}{x>0}, \arctan x$ SONO MONOTONE CRESCENTI

INFATTI, $f'(x) = e^x, \frac{1}{x}, nx^{n-1}, \frac{1}{1+x^2}$ SONO TUTTE ≥ 0

- - - - - - - - - - - - - - -

$f(x) = \sin x$



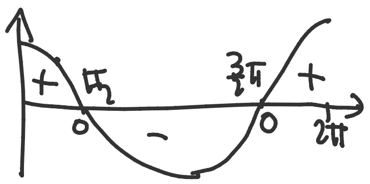
CRESCENTE IN $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

DECRESCENTE IN $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ È MAX

$x_0 = \frac{3}{2}\pi$ È MIN

$f'(x) = \cos x$



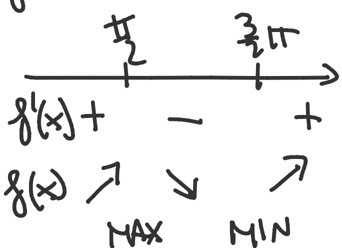
$f'(x) > 0$ IN $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$

$f'(x) < 0$ IN $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$

$f'(x_0) = 0 \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

$f' > 0$ PRIMA DI $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $f' < 0$ DOPO $x_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$ È MAX

$f' < 0$ PRIMA DI $x_0 = \frac{3}{2}\pi$ $f' > 0$ DOPO $x_0 = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}\pi$ È MIN



DIM. CRITERIO DI MONOTONIA

($\Rightarrow$) SUPPONIAMO f CRESCENTE IN (a,b). $f(x+h) - f(x) \geq 0$ SE $h > 0$

$f(x+h) - f(x) \leq 0$ SE $h < 0$

$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \forall h$, PASSO AL $\lim_{h \to 0} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \forall h$, PASSO AL $\lim_{h \to 0} \Rightarrow \underline{f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)}$.

($\Leftarrow$) SUPPONIAMO $f' \geq 0$, PRENDIAMO $x_1 < x_2$, VOGLIO OTTENERE $f(x_1) \leq f(x_2)$

APPLICO IL TEO. DI LAGRANGE SU $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$ TALE CHE

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad \text{CIOÈ} \quad f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} \geq 0$$

CIOÈ $f(x_2) \geq f(x_1)$. x_1 E x_2 SONO QUALSIASI $\Rightarrow f$ È CRESCENTE SU $[a,b]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - 1 - \ln(1+x-x^2)}{x^3} \rightsquigarrow \text{SVILUPPO A ORDINE 3}$$

$\ln(1+x-x^2) =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + o(x^3)}{\underbrace{x^2 - \frac{x^2}{2}}_{\frac{3}{2}x^2} \underbrace{- \frac{x^4}{2} + 2\frac{x^3}{2}}_{} + o(x^3)} = \frac{2x^2 + \cancel{o(x^3)}}{\frac{1}{2}x^2 + \cancel{o(x^3)}} \rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

MOLTO PICCOLA RISPETTO A $x^2 \rightarrow o(x^3)$