Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Clinica

Soluzioni del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

TUTORAGGIO 10 DEL 15 DICEMBRE 2016
ARGOMENTO: EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Risolvere le seguenti equazioni differenziali e determinarne l'intervallo massimale di esistenza:

1. $\begin{cases} y'(x) = e^{-y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   Attraverso la separazione di variabili si ottiene $y'(t)e^{y(t)} = 1$, che integrato tra 0 e x da:

   $$x = \int_0^x 1\mathrm{d}t = \int_0^x y'(t)e^{y(t)}\mathrm{d}t \overset{(z=y(t))}{=} \int_{y(0)}^{y(x)} e^z\mathrm{d}z = e^{y(x)} - e^{y(0)} = e^{y(x)} - 1,$$

   dunque otteniamo che la soluzione è $y(x) = \log(1+x)$.
   Poiché abbiamo la condizione iniziale in $x = 0$, come intervallo massimale abbiamo il più grande intervallo contenente $x = 0$ in cui la funzione $x \to \log(1+x)$ è definita, cioè $(-1, +\infty)$.

2. $\begin{cases} y'(x) = (\cos y(x))^2 \cos x \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

   Per separazione di variabili otteniamo

   $$\sin x = \int_0^x \cos t\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{y'(t)}{(\cos y(t))^2}\mathrm{d}t \overset{(z=y(t))}{=} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}z}{(\cos z)^2} = [\tan z]_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} = \tan(y(x)) - 1,$$

   dunque otteniamo $y(x) = \arctan(1 + \sin x)$, che è definito per ogni x e dunque l'intervallo massimale è tutto $\mathbb{R}$.

3. $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 5\sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   Cerchiamo una soluzione particolare col metodo delle similitudini, che sarà del tipo $y(x) = A\sin x + B\cos x$. Poiché otteniamo $y'(x) + 2y(x) = (2A - B)\sin x + (A + 2B)\cos x$, dovremo prendere A, B che soddisfino $\begin{cases} 2A - B = 5 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$ e cioè $A = 2, B = -1$, dunque $y(x) = 2\sin x - \cos x$.
   Le soluzioni dell'omogenea associata $y' + 2y = 0$ sono $y'(x) = ce^{-2x}$, dunque la soluzione generale della non omogenea sarà $y(x) = ce^{-2x} + 2\sin x - \cos x$.
   Infine, determineremo c imponendo la condizione iniziale: poiché nella formula precedente si ottiene $y(0) = c - 1$, avremo $c = 1$ e dunque la soluzione del problema sarà $y(x) = e^{-2x} + 2\sin x - \cos x$.
   Poiché la soluzione può essere estesa per tutte le x reali, l'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$

4. $\begin{cases} y'(x) + xy(x) = x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Cerchiamo prima le soluzioni dell'omogenea $y_0'(x) + xy_0(x) = 0$: abbiamo

$$\frac{x^2}{2} + c' = \int t\mathrm{d}t = \int -\frac{y_0'(t)}{y_0(t)}\mathrm{d}t = \int -\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\log(y_0(x)),$$

$y_0(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

Cercando ora una soluzione particolare del tipo $y(x) = c(x)y_0(x)$ con y_0 soluzione dell'associata: avremo

$$x^3 = (c(x)y_0(x))' + xc(x)y_0(x) = c'(x)y_0(x) + c(x)(y_0'(x) + xy_0(x)) = c'(x)y_0(x),$$

dunque $c'(x) = \dfrac{x^3}{y_0(x)} = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$ e troviamo c integrando per parti:

$$c(x) = \int_0^x t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \left[-t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x - \int_0^x 2te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = -x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} - \left[2e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^x = 2 - \left(x^2+2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La soluzione particolare è dunque $y(x) = c(x)y_0(x) = 2e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 - 2$ e quindi la soluzione generale è $y(x) = -x^2 - 2 + (c+2)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Imponendo la condizione iniziale otteniamo $c = 0$, dunque la soluzione del problema è $y(x) = -x^2 - 2 + 2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

L'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$.

Risolvere l'equazione differenziale lineare:

5. $\begin{cases} y''(x) + y'(x) - 6y(x) = -4e^{-2x} \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Cerchiamo anzitutto una soluzione particolare col metodo della similitudine, cioè che abbia la stessa forma del termine noto ovvero $y(x) = Ce^{-2x}$. Poiché otteniamo $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = -4Ce^{-2x}$, avremo una soluzione per $C = 1$ cioè $y(x) = e^{-2x}$.

Per quanto riguarda le soluzioni dell'omogenea, il polinomio caratteristico $\lambda^2 + \lambda - 6$ ha per radici $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$ e dunque avremo $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$. Le soluzioni generali quindi saranno $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x} + e^{-2x}$ e A, B andranno trovati imponendo le soluzioni iniziali: poiché $y'(x) = 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x} - 2e^{-2x}$ avremo $y'(0) = 2A - 3B - 2$ e $y(0) = A + B + 1$, dunque A, B saranno le soluzioni di $\begin{cases} 2A - 3B - 2 = 0 \\ A + B + 1 = 0 \end{cases}$ e cioè $A = -\dfrac{1}{5}, B = -\dfrac{4}{5}$.

La soluzione è dunque $-\dfrac{e^{2x}}{5} - \dfrac{4}{5}e^{-3x} + e^{-2x}$.