

Soluzioni del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

TUTORAGGIO 11 DEL 21 – 22 DICEMBRE 2016
ARGOMENTO: EQUAZIONI DIFFERENZIALI, STUDIO DI FUNZIONI INTEGRALI

Risolvere la seguente equazione differenziale e determinarne l'intervallo massimale di esistenza:

$$1. \begin{cases} y'(x) = (y(x))^2 + y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Per separazione di variabili otteniamo $\frac{y'(t)}{(y(t))^2 + y(t)} = 0$, dunque integrando tra 0 e x :

$$\begin{aligned} x &= \int_0^x dt \\ &= \int_0^x \frac{y'(t)}{(y(t))^2 + y(t)} dt \\ &\stackrel{(z=y(t))}{=} \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{dz}{z^2 + z} \\ &= \int_{y(0)}^{y(x)} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz \\ &= [\log |z| - \log |z+1|]_1^{y(x)} \\ &= \log |y(x)| - \log |y(x)+1| + \log 2 \\ &= \log \left| \frac{2y(x)}{y(x)+1} \right| \end{aligned}$$

Poiché per $x = 0$ abbiamo $\frac{2y(0)}{y(0)+1} = 1 > 0$, allora scegliamo il segno positivo per il logaritmo

e abbiamo $x = \log \frac{2y(x)}{y(x)+1}$, dunque la soluzione è $y(x) = \frac{e^x}{2 - e^x}$.

L'intervallo massimale sarà il più grande intervallo contenente $x = 0$ per cui $x \rightarrow \frac{e^x}{2 - e^x}$ è definita, cioè $(-\infty, \log 2)$.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari:

$$2. \begin{cases} y'(x) - 3y(x) = 3 \cos x + \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = ce^{3x}$. Troviamo ora una soluzione col metodo della similitudine, dunque una soluzione del tipo $y(x) = A \cos x + B \sin x$. Poiché $y'(x) = -A \sin x + B \cos x$, allora $y'(x) - 3y(x) = (B - 3A) \cos x - (A + 3B) \sin x$, dunque A, B risolveranno $\begin{cases} B - 3A = 3 \\ -A - 3B = 1 \end{cases}$, cioè $A = -1, B = 0$ e quindi la soluzione particolare è $y(x) = -\cos x$.

La soluzione generale è dunque $y(x) = ce^{3x} - \cos x$, con c data dalla condizione iniziale: poiché $y(0) = c - 1$, nel nostro caso $c = 1$ e dunque $y(x) = e^{3x} - \cos x$.

$$3. \begin{cases} y'(x) - \frac{x}{1+x^2}y(x) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$y_0(x) = e^{-\int \frac{x}{1+x^2}} = e^{\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1+x^2}} = e^{\frac{1}{2}(\log(1+x^2)+c')} = ce^{\frac{1}{2} \log(1+x^2)} = c\sqrt{1+x^2}.$$

Cercando, attraverso la variazione delle costanti, una soluzione del tipo $y(x) = c(x)y_0(x)$, abbiamo

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = y'(x) - \frac{x}{1+x^2}y(x) = c'(x)y_0(x) + c(x)y_0'(x) - \frac{x}{1+x^2}c(x)y_0(x) = c'(x)y_0(x),$$

dunque $c'(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0(x)} = 1+x^2$ e pertanto $c(x) = x + \frac{x^3}{3}$. La soluzione particolare dell'equazione sarà quindi $y(x) = \sqrt{1+x^2} \left(x + \frac{x^3}{3} \right)$ e la soluzione generale sarà $y(x) = \sqrt{1+x^2} \left(c + x + \frac{x^3}{3} \right)$, con c determinato dalle condizioni iniziali: avendo $y(0) = c$, dovrà essere $c = 1$ e cioè $y(x) = \sqrt{1+x^2} \left(1 + x + \frac{x^3}{3} \right)$.

$$4. \begin{cases} y''(x) - y(x) = \cos x + e^{2x} \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$, dunque l'equazione omogenea ha per soluzioni $y_0(x) = Ae^x + Be^{-x}$. Cerchiamo ora, con il metodo della similitudine, una soluzione particolare del tipo $y(x) = C \sin x + D \cos x + Ee^{2x}$: derivando otteniamo $y'(x) = C \cos x - D \sin x + 2Ee^{2x}$ e $y''(x) = -C \sin x - D \cos x + 4Ee^{2x}$, quindi $y''(x) - y(x) = -2C \sin x - 2D \cos x + 3Ee^{2x}$, dunque $C = 0, D = -\frac{1}{2}, E = \frac{1}{3}$.

La soluzione generale è dunque $y(x) = Ae^x + Be^{-x} - \frac{\cos x}{2} + \frac{e^{2x}}{3}$, con A, B che determineremo imponendo le condizioni iniziali: essendo $y'(x) = Ae^x - Be^{-x} + \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{3}e^{2x}$, allora le condizioni

iniziali daranno $\begin{cases} A + B - \frac{1}{6} = 1 \\ A - B + \frac{2}{3} = 1 \end{cases}$, cioè $A = \frac{3}{4}, B = \frac{5}{12}$ e la soluzione quindi sarà $y(x) = \frac{3}{4}e^x + \frac{5}{12}e^{-x} - \frac{\cos x}{2} + \frac{e^{2x}}{3}$.

$$5. \begin{cases} y'(x) - y(x) = e^x \log(1+x^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione dell'omogenea è $y_0(x) = ce^x$, mentre per trovare una soluzione particolare dovremo utilizzare la variazione delle costanti, cioè cercare una soluzione del tipo $y(x) = c(x)y_0(x)$: avremo

$$e^x \log(1+x^2) = y'(x) - y(x) = c'(x)y_0(x) + c(x)y_0'(x) - c(x)y_0(x) = c'(x)y_0(x),$$

dunque $c'(x) = \frac{e^x \log(1+x^2)}{y_0(x)} = \log(1+x^2)$. Per trovare $c(x)$ integriamo per parti:

$$\begin{aligned} c(x) &= \int \log(1+x^2) dx \\ &= x \log(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} \\ &= x \log(1+x^2) - \int \left(2 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx \end{aligned}$$

$$= x \log(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x.$$

Dunque la soluzione particolare è $y(x) = e^x (x \log(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x)$ e la soluzione generale è $y(x) = e^x (c + x \log(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x)$. Per trovare la soluzione del problema imponiamo la condizione iniziale che è $y(0) = c$, dunque otteniamo $c = 0$ e cioè $y(x) = e^x (x \log(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x)$.

$$6. \begin{cases} y''(x) + 4y(x) = \sin(2x) \\ y'(0) = \frac{3}{4} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 4$ ha per radici $\pm 2i$, dunque le soluzioni dell'omogenea sono del tipo $y_0(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$ e tra queste c'è anche il termine noto. Dunque la soluzione particolare con il metodo della similitudine andrà cercata del tipo $y(x) = x(C \cos(2x) + D \sin(2x))$: poiché si ottiene $y''(x) + 4y(x) = 4D \cos(2x) - 4C \sin(2x)$, allora avremo $C = -\frac{1}{4}$ e $D = 0$, dunque $y(x) = -\frac{x \cos(2x)}{4}$.

La soluzione generale è dunque $y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) - \frac{x \cos(2x)}{4}$ e nel nostro caso A, B saranno determinati dalle condizioni iniziali. Abbiamo $y'(x) = \left(2B - \frac{1}{4}\right) \cos(2x) - 2A \sin(2x) + \frac{x \sin(2x)}{2}$ che in $x = 0$ da $y'(0) = 2B - \frac{1}{4}$. Dunque A, B risolveranno $\begin{cases} 2B - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ A = 2 \end{cases}$, cioè $A = 2, B = \frac{1}{2}$ e la nostra soluzione è $y(x) = 2 \cos(2x) + \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{x \cos(2x)}{4}$.

Studiare le seguenti funzioni, determinando l'insieme di definizione, il segno, eventuali asintoti, la monotonia, eventuali punti di massimo e minimo, eventuali punti non derivabilità:

$$7. f(x) = \int_0^x \frac{(\sin t)^2}{1+t^2} dt$$

La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché, a ogni x fissato, la funzione è definita da un integrale di una funzione limitata su intervallo limitato.

Poiché l'integranda è positiva, la funzione sarà positiva per $x > 0$, mentre per $x < 0$ dalle proprietà dell'integrale abbiamo $f(x) = -\int_x^0 \frac{(\sin t)^2}{1+t^2} dt$; per $x = 0$ abbiamo chiaramente $f(0) = 0$.

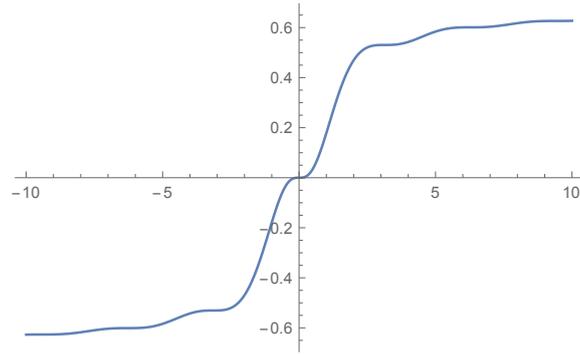
Per x che tende a $+\infty$ abbiamo $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{1+t^2}$, che è un integrale improprio convergente perché $\frac{(\sin t)^2}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ che è integrabile. Dunque f ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$. Per $x \rightarrow -\infty$ abbiamo un altro asintoto orizzontale perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{-\infty} \frac{(\sin t)^2}{1+t^2} dt \stackrel{(s=-t)}{=} - \int_0^{+\infty} \frac{(\sin s)^2}{1+s^2} ds = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Dal teorema fondamentale di calcolo abbiamo $f'(x) = \frac{(\sin x)^2}{1+x^2}$, dunque la funzione è derivabile per ogni x . Inoltre, poiché $f' \geq 0$ su tutto \mathbb{R} , la funzione sarà dappertutto monotona crescente. Abbiamo $f'(x) = 0$ per tutti i multipli interi di π , ma essendo la funzione monotona crescente nessuno di questi è né di massimo né di minimo.

$$8. f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{e^t - 1}{t \sqrt[3]{t}} dt & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Per studiare l'insieme di definizione di f bisogna verificare la convergenza dell'integrale che



la definisce. Questo integrale converge, perché, dalla stima $e^t - 1 \sim t$ per $t \sim 0$ abbiamo $\int_0^x \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}} dt \sim \int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$ che converge. Dunque f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione sarà positiva per $x > 0$, perché l'integranda è positiva. Per $x < 0$ invece l'integranda è negativa ma gli estremi vanno "invertiti" dunque anche qui la funzione è positiva:

$$f(x) = - \int_x^0 \underbrace{\frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}}}_{<0} dt > 0.$$

Per $x \rightarrow +\infty$ l'integranda tende a $+\infty$ e dunque avremo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}} dt = +\infty.$$

Per $x \rightarrow -\infty$ invece l'integranda va a 0 come $-\frac{1}{t\sqrt[3]{t}}$, dunque l'integrale tra 0 e $-\infty$ convergerà e quindi avremo un asintoto orizzontale

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \int_0^{-\infty} \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}} dt < +\infty.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo abbiamo $f'(x) = \frac{e^x - 1}{x\sqrt[3]{x}}$ per $x \neq 0$. In $x = 0$ invece la funzione non è derivabile perché, calcolando il limite del rapporto incrementale con de l'Hôpital:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{e^t - 1}{t\sqrt[3]{t}} dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x\sqrt[3]{x}} = \pm\infty.$$

$f'(x)$ è sempre positiva per x positiva e negativa per x negativa, dunque $f(x)$ è monotona crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$. L'unico punto di non derivabilità è $x = 0$, che è un punto di minimo perché per ogni altra x abbiamo $f(x) > 0 = f(0)$. Poiché non vi sono altri punti in cui la derivata si annulla o non esiste, non ci sono punti di minimo.

