**Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Clinica**

# Soluzioni del tutoraggio di Analisi Matematica I

**A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia**

Tutoraggio 6 del 10 Novembre 2016
Argomento: Formula di Taylor

1. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 della funzione $f(x) = e^{2x}\cos(x) - \sin(2x)$ in $x_0 = 0$.
   Utilizzando i seguenti sviluppi di Taylor al secondo ordine

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o\left((2x)^2\right) = 1 + 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \\ \sin(2x) &= 2x + o\left((2x)^2\right) \end{aligned}$$

   otteniamo

$$\begin{aligned} & e^{2x}\cos(x) - \sin(2x) \\ = \; & \left(1 + 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - \left(2x + o\left(x^2\right)\right) \\ = \; & 1 + 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\left(2x + 2x^2 + o\left(x^2\right)\right) + o\left(x^2\right)\left(1 + 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right)\right) - 2x + o\left(x^2\right) \\ = \; & 1 + 2x + 2x^2 - \frac{x^2}{2} - 2x + o\left(x^2\right) \\ = \; & 1 + \frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

   Dunque la risposta esatta è (c).

2. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 della funzione $f(x) = \arctan(x+1)$ in $x_0 = 0$.
   Poiché le derivate di $f(x)$ valgono

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x+1)^2} \qquad\qquad f''(x) = -\frac{2(x+1)}{\left(1 + (x+1)^2\right)^2},$$

   allora dalla definizione di sviluppo di Taylor abbiamo

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4},$$

   e la risposta esatta è (b).

3. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 della funzione $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$ in $x_0 = 0$.
   Dallo sviluppo di Taylor

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o\left(y^2\right)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x+x^2} &= 1+\frac{x+x^2}{2}-\frac{\left(x+x^2\right)^2}{8}+o\left(\left(x+x^2\right)^2\right) \\
&= 1+\frac{x+x^2}{2}-\frac{x^2+2x^3+x^4}{8}+o\left(x^2\right) \\
&= 1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+o\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

e la risposta esatta è (c).

4. Determinare lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 della funzione $f(x)=\log\left(1+x^2\right)-(\log(1+x))^2$ in $x_0=0$.
Dallo sviluppo di Taylor

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\log\left(1+x^2\right)-(\log(1+x))^2 &= x^2-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) \\
&= x^2+o\left(x^2\right)-\left(x^2+\frac{x^4}{4}+\left(o\left(x^2\right)^2\right)-x^3+2xo\left(x^2\right)-x^2o\left(x^2\right)\right) \\
&= x^2+o\left(x^2\right)-\left(x^2-x^3+o\left(x^2\right)\right) \\
&= x^3+o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

e la risposta esatta è (c).

5. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\log(1+2x)}{x^2}$.
Utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x+o\left(x^2\right) \\
\log(1+2x) &= 2x-\frac{(2x)^2}{2}+o\left((2x)^2\right)=2x-2x^2+o\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\log(1+2x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\left(x+o\left(x^2\right)\right)-\left(2x-2x^2+o\left(x^2\right)\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x-2x+2x^2+o\left(x^2\right)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

La risposta esatta dunque è (d).

6. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{-\frac{x}{2}}-\cos\sqrt{x}}$.
Dagli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{x}{2}} &= 1+\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2+o\left(\left(-\frac{x}{2}\right)^2\right)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right) \\
\cos\sqrt{x} &= 1-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^4}{24}+o\left(\left(\sqrt{x}\right)^4\right)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{-\frac{x}{2}}-\cos\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)-\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o\left(x^2\right)\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)-\frac{x^2}{24}+o\left(x^2\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{8}+\frac{o(x^2)}{x^2}-\frac{1}{24}+\frac{o(x^2)}{x^2}}\\
&= 12
\end{aligned}
$$

e la risposta esatta è (d).

7. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-\tan(x)-\sqrt{1+x^2}}{\sin(x)-x\cos(x)}$.
Grazie agli sviluppi

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\\
\sqrt{1+x^2} &= 1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

otteniamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\tan(x)-\sqrt{1+x^2}}{\sin(x)-x\cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)-\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-\left(1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)}{x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{o(x^3)}{x^3}}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e la risposta esatta è (b).

8. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin\left(x^2\right)}-\dfrac{1}{(\tan(x))^2}\right)$.
Riscrivendo il limite come $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\tan(x))^2-\sin\left(x^2\right)}{\sin\left(x^2\right)(\tan(x))^2}$ possiamo applicare gli sviluppi asintotici

$$
\begin{aligned}
(\tan(x))^2 &= (x+o(x))^2\\
&= \left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)^2\\
&= x^2+x\left(\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{x^3}{3}x+\frac{x^3}{3}\left(\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+o\left(x^3\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)\\
&= x^2+\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)\\
\sin\left(x^2\right) &= x^2+o\left(x^2\right)=x^2+o\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

e si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin\left(x^2\right)}-\frac{1}{(\tan(x))^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)-\left(x^2+o\left(x^4\right)\right)}{\left(x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(x+o(x)\right)^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)}{\left(x^2+o\left(x^2\right)\right)^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^4\right)}\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

e la risposta esatta è (d).

9. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\frac{1}{1-x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$.
Dagli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+o\left(x^2\right)\\
\sqrt{1+x^2} &= 1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\\
\sqrt{1-x^2} &= 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

segue che

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-\left(1+x+x^2+o\left(x^2\right)\right)}{1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e la risposta esatta è (a).

10. Calcolare il limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^{\sin(x)}-3^{\tan(x)}+\cos(x^2)}{\arctan\left(x^2\right)}$.
Dati gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned}
6^x &= 1+\log(6)x+\frac{(\log(6))^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)\\
2^{\sin(x)} &= 1+\log(2)\sin(x)+\frac{(\log(2))^2}{2}(\sin(x))^2+o\left((\sin(x))^2\right)\\
&= 1+\log(2)\left(x+o\left(x^2\right)\right)+\frac{(\log(2))^2}{2}(x+o(x))^2+o\left((o(x))^2\right)\\
&= 1+\log(2)x+\frac{(\log(2))^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)\\
3^{\tan(x)} &= 1+\log(3)\tan(x)+\frac{(\log(3))^2}{2}(\tan(x))^2+o\left((\tan(x))^2\right)\\
&= 1+\log(3)\left(x+o\left(x^2\right)\right)+\frac{(\log(3))^2}{2}(x+o(x))^2+o\left((o(x))^2\right)\\
&= 1+\log(3)x+\frac{(\log(3))^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos\left(x^2\right) &= 1+o\left(x^2\right)\\
\arctan\left(x^2\right) &= x^2+o\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

otteniamo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{6^x-2^{\sin(x)}-3^{\tan(x)}+\cos(x^2)}{\arctan\left(x^2\right)}\\
=&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\log(6)x+\frac{(\log(6))^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)-\left(1+\log(2)x+\frac{(\log(2))^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}\right.\\
&\left.\frac{-\left(1+\log(3)x+\frac{(\log(3))^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)+1+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(\log(6))^2-(\log(2))^2-(\log(3))^2}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}\\
=&\frac{(\log(6))^2-(\log(2))^2-(\log(3))^2}{2}\\
=&\log(2)\log(3)
\end{aligned}
$$

e la risposta esatta è (b).

11. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin(x)}-e^{\arctan(x)}}{x\log(\cos(x))}$.

Utilizzando gli sviluppi

$$
\begin{aligned}
e^{\sin(x)} &= 1+\sin(x)+\frac{(\sin(x))^2}{2}+\frac{(\sin(x))^3}{6}+o\left((\sin(x))^3\right)\\
&= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{\left(x+o\left(x^2\right)\right)^2}{2}+\frac{(x+o(x))^3}{6}+o\left(x^3\right)\\
&= 1+x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)+\frac{x^2+o\left(x^3\right)}{2}+\frac{x^3+o\left(x^3\right)}{6}+o\left(x^3\right)\\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\\
e^{\arctan(x)} &= 1+\arctan(x)+\frac{(\arctan(x))^2}{2}+\frac{(\arctan(x))^3}{6}+o\left((\arctan(x))^3\right)\\
&= 1+\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{\left(x+o\left(x^2\right)\right)}{2}+\frac{(x+o(x))^3}{6}+o\left(x^3\right)\\
&= 1+x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)+\frac{x^2+o\left(x^3\right)}{2}+\frac{x^3+o\left(x^3\right)}{6}+o\left(x^3\right)\\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\\
\log(\cos(x)) &= \cos(x)-1+o(\cos(x)-1)\\
&= -\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)+o\left(o\left(x^2\right)\right)\\
&= -\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

si ottiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x)}-e^{\arctan(x)}}{x\log(\cos(x))} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)}
\end{aligned}
$$

$$= \quad -\frac{1}{3},$$

dunque la risposta esatta è (b).

12. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\left((1-e^{-x})^2 - x^2\right)\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin(2x)}$.
Utilizzando gli sviluppi

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2x + o(x) \\ \left(1-e^{-x}\right)^2 - x^2 &= (1-(1-x+o(x)))^2 - x^2 = (x+o(x))^2 - x^2 = o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left((1-e^{-x})^2 - x^2\right)\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{o\left(x^2\right)\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{2x+o(x)} = \frac{o(x)\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{2+o(1)} = o(x)\sin\left(\frac{2}{x}\right).$$

Poiché, per definizione di $o$ piccolo, $\lim_{x\to 0} o(x) = 0$ e inoltre $-1 \le \sin\left(\frac{2}{x}\right) \le 1$, allora dal teorema dei carabinieri il limite è 0 e la risposta esatta è dunque (a).