Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Clinica

Soluzioni del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

Tutoraggio 7 del 24 – 25 Novembre 2016
Argomento: Serie

1. Discutere la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2 + \log n}$

   Innanzi tutto la serie è a termini positivi, dunque convergenza semplice e assoluta si equivalgono. Il termine n-esimo della serie ha lo stesso andamento asintotico di $\frac{\log(n)}{n^2}$, che a sua volta va a zero più rapidamente di $\frac{1}{n^a}$ per ogni $1 < a < 2$. Dunque, poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty$ per $1 < a < 2$, allora dal criterio del confronto la serie di partenza converge (assolutamente).

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

   La serie ha termini di segno alterno e il termine n-esimo $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ tende a zero in modo decrescente. Dunque, dal criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.
   La serie non converge assolutamente perché il termine n-esimo ha lo stesso andamento asintotico di $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = +\infty$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\arctan \frac{1}{n}\right)$

   La serie è a termini positivi e diverge a $+\infty$ perché il termine n-esimo si comporta come $\frac{1}{n}$: infatti, dagli sviluppi asintotici di $\sin x$ e $\arctan x$ intorno a $x = 0$ abbiamo

   $$\sin\left(\arctan \frac{1}{n}\right) \sim \arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^{\log n}}$

   La serie converge assolutamente perché il termine n-esimo verifica

   $$\left|\frac{\sin(n)}{n^{\log n}}\right| \le \frac{1}{n^{\log n}} \le \frac{1}{n^{\log 3}}$$

   e $\log 3 > 1$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

Posto $a_n := \dfrac{n^n}{2^n n!}$, applicando il criterio del rapporto otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{2^n n!}{n^n} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!}\frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1}{2}(n+1)\frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{2} > 1,\end{aligned}$$

dunque la serie non converge.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{\log((n+1)!) - \log(n!)}\right)$

Riscrivendo l'argomento della tangente come

$$\frac{1}{\log((n+1)!) - \log(n!)} = \frac{1}{\log(n!(n+1)) - \log(n!)} = \frac{1}{\log(n!) + \log(n+1) - \log(n!)} = \frac{1}{\log(n+1)},$$

il termine n-esimo ha lo stesso andamento di $\tan\left(\dfrac{1}{\log(n+1)}\right)$. Dall'andamento della tangente intorno a 0 avremo $\tan\left(\dfrac{1}{\log(n+1)}\right) \sim \dfrac{1}{\log(n+1)}$ e dunque la serie diverge.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$

La serie è a segno alterno e infinitesima. Inoltre, il termine n-esimo decresce, poiché

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x+\sin x} = -\frac{1+\cos(x)}{(x+\sin x)^2} \leq 0.$$

Dunque la serie converge per il criterio di Leibniz ma, poiché il termine n-esimo va come $\dfrac{1}{n}$, non converge assolutamente.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\cos\left(\frac{2}{n}\right) - e^{-\frac{2}{n^2}}\right)$

Dagli sviluppi di Taylor di coseno e esponenziale otteniamo

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2}{n}\right) &= 1 - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ e^{-\frac{2}{n^2}} &= 1 - \frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right),\end{aligned}$$

dunque il termine n-esimo della serie è asintoticamente equivalente a $-\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{n^2}$ e la serie converge.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(\cos n))^n$

Poiché $(\sin(\cos n))^n \leq (\sin 1)^n$ e $\sin 1 < 1$, la serie converge.

2. Discutere la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie al variare del parametro reale a:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n2^{na}$

Innanzi tutto, se $a > 0$ la serie non converge perché il termine n-esimo non va a 0.
Se invece $a < 0$, allora la serie converge (assolutamente) per il criterio della radice, perché $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n2^{na}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{na}} = 2^a < 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(2a))^n}{n}$

La serie converge assolutamente se $|\sin(2a)| < 1$, cioè se $2a \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ per qualche intero k, ovvero $a = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
Se $a = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge mentre per $a = \frac{3}{4}\pi + k\pi$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per Leibniz ma non assolutamente.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^a+1}{n^a+2}\right)$

Innanzi tutto, per $a \leq 0$ la serie non è infinitesima e dunque diverge.
Per $a > 0$, riscrivendo il termine n-esimo come $\log\left(1 - \frac{1}{n^a+2}\right)$, otteniamo che quest'ultimo ha l'andamento asintotico di $\frac{1}{n^a}$ e dunque converge (assolutamente) se e solo se $a > 1$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n + 2^n}{3^n}$

Innanzi tutto, se $|a| \geq 3$ il termine n-esimo non va a 0 quindi la tesi non converge.
Se invece $|a| < 3$ allora converge assolutamente dal criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n+2^n}{3^n}} = \frac{|a|}{3}\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{|a|}\right)^n} = \frac{|a|}{3} < 1.$$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^a + \sqrt{n} + a^2}$

Il termine n-esimo ha l'andamento di $\frac{1}{\sqrt{n}}$ se $a < \frac{1}{2}$, oppure di $\frac{1}{n^a}$ se $a \geq \frac{1}{2}$. Dunque, in ogni caso è infinitesimo e si vede facilmente che è decrescente. Quindi c'è sempre convergenza semplice per ogni $a \in \mathbb{R}$.
Dall'andamento asintotico segue anche che la serie converge assolutamente se e solo se $a > 1$.