Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Clinica

Soluzioni del tutoraggio di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

Tutoraggio 9 del 5 Dicembre 2016
Argomento: Integrali impropri

1. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{(\sin\sqrt{x})^3}{x^2}\mathrm{d}x$$

L'integranda è limitata su tutto l'intervallo $[0,1]$, che è limitato, tranne che in 0. Dunque, basterà discutere il comportamento per $x \sim 0$.
Poiché $\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ per $x \sim 0$, allora $\dfrac{(\sin\sqrt{x})^3}{x^2} \sim \dfrac{(\sqrt{x})^3}{x^2} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, che è integrabile intorno a $x = 0$, dunque l'integrale converge.

2. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - x^2}\log x}$$

L'integranda non è limitata intorno a $x = 0$ e $x = 1$.
Intorno a $x = 0$ abbiamo $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - x^2}\log x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}\log x}$. Quest'ultima funzione è integrabile in 0 perché $\log(x) \le -1$ e dunque $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{|\sqrt{x}\log x|} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} < +\infty$.
Intorno a $x = 1$ invece $\log x \sim x - 1$, quindi l'integranda va come $\dfrac{1}{-(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ che non è integrabile, dunque l'integrale non converge.

3. Studiare la convergenza, al variare del parametro reale a, dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^a(1 - e^{-x})\mathrm{d}x$$

All'infinito l'integranda va asintoticamente come x^a, che è integrabile per $a < -1$.
In $x = 0$, unico punto in cui l'integranda non è limitata, utilizziamo la stima $1 - e^{-x} \sim x$ e abbiamo $x^a(1 - e^{-x}) \sim x^{a+1}$ che è integrabile per $a > -2$.
Dunque l'integrale converge per $-2 < a < -1$.

4. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x - x^2}\mathrm{d}x$$

L'integranda ha problemi solo in $x = 0$ ma l'andamento è lo stesso di $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ che è integrabile, dunque l'integrale converge.
Per calcolarlo, utilizziamo il cambio di variabile $y = \sqrt{x}$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x - x^2} \mathrm{d}x &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} \\
&= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y-1} \right) \mathrm{d}y \\
&= 2 \left[\frac{1}{2} \log|y+1| - \frac{1}{2} \log|y-1| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \log \left| \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right| - \log \left| \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right| \\
&= \log \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \log \left(3 + 2\sqrt{2} \right).
\end{aligned}
$$

5. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} \mathrm{d}x$$

L'integranda ha, per $x \to +\infty$, lo stesso andamento di $\dfrac{\log x}{x^2}$, che è integrabile. In $x = 0$ ha invece lo stesso andamento di $\log x$ che è anch'essa integrabile, dunque l'integrale converge.
Per calcolarlo, integriamo per parti:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} \mathrm{d}x &= \lim_{a \to 0} \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{\log x}{(x+1)^2} \mathrm{d}x \\
&= \lim_{a \to 0} \lim_{b \to +\infty} \left(\left[-\frac{\log x}{x+1} \right]_a^b + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} \right) \\
&= \lim_{a \to 0} \lim_{b \to +\infty} \left(\left[-\frac{\log x}{x+1} \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{a \to 0} \lim_{b \to +\infty} \left(\left[-\frac{\log x}{x+1} \right]_a^b + [\log|x| - \log|x+1|]_a^b \right) \\
&= \lim_{a \to 0} \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{\log b}{b+1} + \frac{\log a}{a+1} + \log b - \log(b+1) - \log a + \log(a+1) \right) \\
&= \lim_{a \to 0} \left(\frac{\log a}{a+1} - \log a + \log(a+1) \right) + \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{\log b}{b+1} + \log b - \log(b+1) \right) \\
&= \lim_{a \to 0} \left(\frac{a}{a+1} \log a + \log(a+1) \right) + \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{\log b}{b+1} + \log \frac{b}{b+1} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$