Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

LEZIONE 2 DEL 6 OTTOBRE 2016
ARGOMENTO: DISEQUAZIONI, INSIEMI DI DEFINIZIONE

Determinare l'insieme di definizione e il segno delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 - 8x$
Innanzi tutto, $f(x)$ è ben definita per ogni x reale. Poichè tutti gli addendi hanno il fattore x, possiamo scrivere
$$x\left(x^4 - 2x^2 - 8\right) < 0.$$
Per studiare il secondo fattore, applichiamo la sostituzione $y = x^2$ e consideriamo il polinomio $y^2 - 2y - 8$, che ha per zeri $y = -2$ e $y = 4$; dunque, la disequazione equivale a
$$x\left(x^2 + 2\right)\left(x^2 - 4\right) < 0,$$
che a sua volta si scompone in
$$x\left(x^2 + 2\right)(x - 2)(x + 2) < 0.$$
I segni dei vari fattori sono:

	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 + 2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Dunque, $f(x) > 0$ per $-2 < x < 0$ e $x > 2$; $f(x) = 0$ per $x = -2, 0, 2$ e $f(x) < 0$ per $x < -2$ e $0 < x < 2$.

2. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x+1}$
$f(x)$ è definita per i valori di x che non annullano il denominatore, cioè $x \neq -1, 0$.
Per studiarne il segno scriviamo f come un'unica frazione:
$$f(x) = \frac{x(x+1) + x + 1 - 4x}{x(x+1)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x+1)} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}.$$
A questo punto basta studiare il segno dei singoli fattori del numeratore e del denominatore:

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
Numeratore	$+$	$+$	$+$	$+$
Denominatore	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

Dunque, $f(x) > 0$ per $x < -1$, $0 < x < 1$ e $x > 1$, $f(x) = 0$ per $x = 1$ e $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$.

3. $f(x) = \left|\cos(2x) - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$
   La funzione è definita per ogni x reale. Inoltre, per la periodicità del coseno possiamo limitarci a considerare $0 \le x < \pi$.
   Discutiamo anzitutto il segno della quantità dentro il modulo: poiché $\cos(2x) - \frac{1}{2} \ge 0$ per $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6} \le x < \pi$, possiamo scrivere

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) - 1 & \text{se } 0 \le x \le \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6} \le x < \pi \\ -\cos(2x) & \text{se } \frac{\pi}{6} < x \le \frac{5}{6}\pi \end{cases}$$

   Nel primo intervallo di definizione di f, questa non sarà mai positiva, perché il coseno non è mai maggiore di 1: varrà zero per $x = 0$ e sul resto dell'intervallo sarà negativa.
   Nel secondo intevallo, f sarà positiva quando il coseno è negativo, cioè $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$.
   In totale, $f(x) > 0$ per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$, $f(x) = 0$ per $x = 0, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ e $f(x) < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$. (Più in generale, $f(x) > 0$ per $\left(k + \frac{1}{4}\right)\pi < x < \left(k + \frac{3}{4}\right)\pi$, $f(x) = 0$ per $x = k\pi, \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi, \left(k + \frac{3}{4}\right)\pi$ e $f(x) < 0$ per $k\pi < x < \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi$ e $\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi < x < \pi$ per ogni intero k).

4. $f(x) = \sqrt{7 - e^x} - \sqrt{e^x - 2}$
   La funzione è definita quando gli argomenti delle radici sono entrambi maggiori o uguali a 0, cioè $2 \le e^x \le 7$, ovvero $\log 2 \le x \le \log 7$.
   $f(x) > 0$ equivale a

$$\sqrt{7 - e^x} > \sqrt{e^x - 2},$$

   che equivale a richiedere la stessa disuguaglianza tra gli argomenti delle radici:

$$7 - e^x > e^x - 2.$$

   Quest'ultima relazione si verifica per $e^x < \frac{9}{2}$, cioè $x < \log\frac{9}{2}$. Analogamente, $f(x) = 0$ per $x = \log\frac{9}{2}$ e $f(x) < 0$ per $x > \log\frac{9}{2}$.
   Intersecando con l'insieme di definizione di $f(x)$ otteniamo $f(x) > 0$ per $\log 2 < x < \log\frac{9}{2}$, $f(x) = 0$ per $x = \log\frac{9}{2}$ e $f(x) < 0$ per $\log\frac{9}{2} < x < \log 7$.

5. $f(x) = \arctan\left(\frac{e^{2x} - 4}{e^x - e^{-x}}\right)$
   Poiché l'arcotangente non ha problemi di definizione, gli unici valori per cui f non è definita sono gli zeri del numeratore, cioè i valori per cui $e^x = e^{-x}$, ovvero $x = -x$: l'unico valore da escludere è dunque $x = 0$.
   Per lo studio del segno, ricordiamo che il segno dell'arcotangente è sempre uguale a quello dell'argomento, dunque basterà studiare il segno di $g(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^x - e^{-x}}$. Quest'ultima si fattorizza come $\frac{(e^x - 2)(e^x + 2)}{e^{-x}(e^{2x} - 1)}$, dunque basterà vedere il segno dei fattori (ignorando $e^x + 2$ e e^x

che sono sempre positivi):

	$x < 0$	$0 < x < \log 2$	$x > \log 2$
$e^x - 2$	$-$	$-$	$+$
$e^{2x} - 1$	$-$	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$

.

f è dunque positiva per $x < 0$ e $x > \log 2$, si annulla in $x = \log 2$ ed è negativa per $0 < x < \log 2$.

6. $f(x) = \log(2 - \log(x-1))$
Il dominio di f è dato dai valori di x per cui entrambi i logaritmi sono definiti. Il primo lo sarà quando $x - 1 > 0$, cioè $x > 1$; il secondo sarà ben definito quando $2 - \log(x-1) > 0$, cioè $\log(x-1) < 2$, ovvero $x < 1 + e^2$. In totale, f sarà definita per $1 < x < 1 + e^2$.
f sarà positiva quando l'argomento sarà maggiore di 1:
$$2 - \log(x-1) > 1.$$
Questo è equivalente a richiedere $\log(x-1) < 1$, cioè $x < 1 + e$.
Dunque, $f(x)$ sarà positiva per $1 < x < 1 + e$, nulla per $x = 1 + e$ e negativa per $1 + e < x < 1 + e^2$.

7. $f(x) = |x+1| - |2x-3|$
$f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Per studiarne il segno, consideriamo innanzi tutto le quantità all'interno dei moduli: per $x \geq \frac{3}{2}$ sono entrambe non-negative, per $x < -1$ sono entrambe negative mentre per $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ abbiamo $2x - 3 < 0 \leq x + 1$.
Dunque, possiamo scrivere
$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) + (2x-3) & \text{se } x < -1 \\ (x+1) + (2x-3) & \text{se } -1 \leq x < \dfrac{3}{2} \\ (x+1) - (2x-3) & \text{se } x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} = \begin{cases} x - 4 & \text{se } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{se } -1 \leq x < \dfrac{3}{2} \\ 4 - x & \text{se } x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$
Vediamo cosa succede nei tre intervalli in cui varia la definizione di f.
Quando $x < -1$, $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 4$, ma questo non è mai verificato quindi $f(x) < 0$ per $x < -1$.
Se $-1 \leq x < \frac{3}{2}$ allora $f(x) > 0$ quando $x > \frac{2}{3}$; dunque, $f(x) < 0$ per $-1 \leq x < \frac{2}{3}$, $f(x) = 0$ per $x = \frac{2}{3}$ e $f(x) > 0$ per $\frac{2}{3}x < \frac{3}{2}$.
Infine, per $x \geq \frac{3}{2}$ abbiamo $f(x) > 0$ quando $x < 4$, quindi $f(x) < 0$ per $x > 4$, $f(x) = 0$ per $x = 4$ e $f(x) > 0$ per $x > 4$.
Riassumendo, $f(x)$ è positiva per $\frac{2}{3} < x < 4$, si annulla in $x = \frac{2}{3}$ e $x = 4$ ed è negativa per $x < \frac{2}{3}$ e $x > 4$.

8. $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{x^6 - 7x^3 - 8}$
La funzione non è definita per le x che risolvono il polinomio al denominatore. Quest'ultimo diventa, scrivendo $y = x^3$, $y^2 - 7y - 8$, che ha per radici $y = -1$ e $y = 8$. Dunque, il denominatore di $f(x)$ vale 0 quando $x^3 = -1$ oppure $x^3 = 8$, quindi $f(x)$ non è definita in $x = -1$ e $x = 2$.

Per studiare il segno di f scriviamo il denominatore come $x^6 - 7x^3 - 8 = \left(x^3 + 1\right)\left(x^3 - 8\right)$ e studiamo il segno dei vari fattori:

	$x < -1$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$1 - e^x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x^3 + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x^3 - 8$	$-$	$-$	$-$	$+$
Numeratore	$+$	$+$	$-$	$-$
Denominatore	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

.

Dunque $f(x) > 0$ per $x < -1$ e $0 < x < 2$, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e $x > 2$.

9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{4\cos(x)^3 - 3\cos(x)}{2 + \sin(x)}}$

Affinché f sia definita bisogna imporre che l'argomento della radice non sia negativo e che il denominatore non sia nullo. Quest'ultimo però è sempre positivo, dal momento che $\sin(x) \geq -1$.

Le condizioni di esistenza equivalgono dunque alla non-negatività del numeratore, che si può fattorizzare come

$$4\cos(x)^3 - 3\cos(x) = 4\cos(x)\left(\cos(x)^2 - \frac{3}{4}\right) = 4\cos(x)\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Studiamo dunque il segno dei singoli fattori:

	$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi <$
$\cos(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$f(x)$ è dunque definita (considerando solo $0 \leq x < 2\pi$) per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ e $\frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$.

Quanto al segno, essendo f definita come una radice quadrata sarà sempre positiva fintanto che è ben definita, ad eccezione dei suoi zeri.

Nel nostro caso, $f(x) = 0$ per $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$, dunque $f(x) > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ e $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$.