Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzione degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

Lezione 3 del 13 Ottobre 2016
Argomento: Limiti

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}$

   Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}$ si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x} &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+x}\frac{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-\left(x^2+x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x^2+x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2. $\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x)}{\arctan(3x)}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x)}{\arctan(3x)} &= \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\tan(2x)}{2x}\frac{3x}{\arctan(3x)}\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos(2x)}\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{\tan(\arctan(3x))}{\arctan(3x)}\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos(2x)}\frac{\sin(2x)}{2x}\frac{1}{\cos(\arctan(3x))}\frac{\sin(\arctan(3x))}{\arctan(3x)}\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos(2x)}\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos(\arctan(3x))}\lim_{x\to0}\frac{\sin(\arctan(3x))}{\arctan(3x)}\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{2x}\lim_{x\to0}\frac{\sin(\arctan(3x))}{\arctan(3x)}\\ &= \frac{2}{3},\end{aligned}$$

   dove l'ultmo passaggio segue dal limite notevole $\lim_{y\to0}\frac{\sin(y)}{y}=1$.

3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x\sin(x) + e^{\arctan(x)}}{3x^2 + x(\log(x))^2 + \cos(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x\sin(x) - 2e^{\arctan(x)}}{3x^2 + x(\log(x))^2 + \cos(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{\sin(x)}{x} - \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2}}{3 + \frac{(\log(x))^2}{x} + \frac{\cos(x)}{x}} = \frac{1}{3}.$$

4. $\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{x+2}{x-3}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{5}{x-3}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(5\frac{x-3}{5}\log\left(1+\frac{5}{x-3}\right) + 3\log\left(1+\frac{5}{x-3}\right)\right) \\
&= 5\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{5}\log\left(1+\frac{5}{x-3}\right) + 3\lim_{x\to+\infty}\log\left(1+\frac{5}{x-3}\right) \\
&= 5\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{5}\log\left(1+\frac{5}{x-3}\right) \\
&= 5,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio è stato usato il limite notevole $\lim_{y\to 0}\dfrac{1}{y}\log(1+y) = 1$.

5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{e^x - e}{x\log(x)}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x - e}{x\log(x)} = e\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x\log(1+(x-1))} = e\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}\frac{\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}}{\lim_{x\to 1}\frac{\log(1+(x-1))}{x-1}} = e\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = e,$$

dove abbiamo usato i limiti notevoli $\lim_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y} = \lim_{y\to 0}\dfrac{\log(1+y)}{y} = 1$.

6. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}e^x = +\infty,$$

dove abbiamo usato il limite notevole $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

7. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\frac{\frac{1}{\cos(x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\lim_{x\to 0}x = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x = 0.$$

8. $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0} e^{\log\left((\cos(x))^{\frac{1}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(\cos(x))}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+(\cos(x)-1))}{\cos(x)-1}\frac{1-\cos(x)}{x^2}(-x)} \\
&= e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+(\cos(x)-1))}{\cos(x)-1}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\lim_{x\to 0}(-x)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(-x)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1-\log(1+\sin(x))}{x}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1-\log(1+\sin(x))}{x} \\
=\ &\lim_{x\to 0}\left(3\frac{e^{3x}-1}{3x}-\frac{\log(1+\sin(x))}{x}\right) \\
=\ &3\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin(x))}{\sin(x)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \\
=\ &3-1\cdot 1 \\
=\ &2.
\end{aligned}$$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x-e^{-x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+e^{-x}-1}{e^x-1-(e^{-x}-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{-x}}{\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{2} = 0.$$

11. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[x]{3^x+e^x\log(x)+x^2 2^x}$

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt[x]{3^x+e^x\log(x)+x^2 2^x} = 3\lim_{x\to +\infty}\sqrt[x]{1+\left(\frac{e}{3}\right)^x\log(x)+x^2\left(\frac{2}{3}\right)^x} = 3\lim_{x\to +\infty}\sqrt[x]{1} = 3.$$