Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

LEZIONE 5 DEL 27 OTTOBRE 2016
ARGOMENTO: DERIVATE

1. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = x\sqrt{1-|x|}$.
La funzione è chiaramente derivabile in $(-1,0) \cup (0,1)$ in quanto composizione di funzioni elementari derivabili. Per vedere se lo è anche nei punti $x = -1, 0, 1$ applichiamo la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale.
In $x = 0$ $f(x)$ è derivabile perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{1-|x|} = 1.$$

Negli altri due punti invece f non è derivabile perché provando a calcolare $f'(-1)$ si ottiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{x}{\sqrt{1-x}} = -\infty;$$

analogamente, in $x = -1$ si ottiene

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{1+x}}{x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{1+x}} = +\infty.$$

Dunque, $f(x)$ è derivabile per $-1 < x < 1$ e la risposta esatta è (c).

2. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 1 - \cos(x)}$.
La funzione è sicuramente derivabile fintanto che l'argomento della radice non si annulla. Poiché x^2 e $1 - \cos(x)$ sono due quantità non-negative che si annullano solo per $x = 0$, l'argomento della radice si annulla solo in $x = 0$ e dunque $f'(x)$ esiste per $x > 0$.
In $x = 0$ abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1-\cos(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \lim_{x\to 0} \sqrt{1 + \frac{1-\cos(x)}{x^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

ma quest'ultimo limite non esiste, perché vale $\sqrt{\frac{3}{2}}$ per $x \to 0^+$ e $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ per $x \to 0^-$.
Dunque, $f(x)$ è derivabile in ogni $x \neq 0$ e la risposta esatta è (b).

3. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} \log\left(x^3 - 3x^2 + 3x\right) & 0 < x < 1, x > 1 \\ 0 & x = 0, 1 \end{cases}$.
La funzione è chiaramente derivabile per $0 < x < 1$ e $x > 1$. In $x = 0$ il limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{x-1} \log\left(x^3 - 3x^2 + 3x\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x-1}\left(\log(x) + \log\left(x^2 - 3x + 2\right)\right) \\
&= -\lim_{x\to 0} x(\log(x) + 2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dunque $f'(0)$ esiste e vale 0.
In $x = 1$ invece abbiamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{(x-1)^2} \log\left(1 + (x-1)^3\right) = \lim_{x\to 1} x^2 \lim_{x\to 1} \frac{\log\left(1 + (x-1)^3\right)}{(x-1)^3} \lim_{x\to 1}(x-1) = 0,$$

dunque anche in $x = 1$ la derivata esiste (e vale nuovamente 0).
La risposta esatta è dunque (a).

4. Trovare i valori del parametro reale a per cui la funzione $f(x) = \sqrt{\log\left(1 + a^2 + x^2\right)}$ è derivabile nel punto $x = 0$.
   Se $a > 0$, allora l'argomento del logaritmo è sempre maggiore di 1 e dunque l'argomento della radice è positivo e quindi f è sempre derivabile, anche in $x = 0$.
   Per $a = 0$ invece la funzione non è derivabile perché avremmo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\log\left(1 + x^2\right)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\log\left(1 + x^2\right)}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x},$$

   che non esiste.
   Dunque, $f'(0)$ esiste per ogni $a \neq 0$ e dunque la risposta corretta è (b).

5. Trovare i valori del parametro reale a per cui la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(ax)}{x} & x > 0 \\ ax & x \le 0 \end{cases}$ è derivabile nel punto $x = 0$.
   Bisogna verificare che il limite del rapporto incrementale sia lo stesso per $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.
   Nel primo caso abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = a^2 \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{a^2}{2}.$$

   Nel secondo caso abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax}{x} = a.$$

   Dunque, $f'(0)$ esiste se e solo se $\dfrac{a^2}{2} = a$, cioè per $a = 0$ e $a = 2$, dunque la risposta esatta è (d).

6. Trovare i valori del parametro reale a per cui la funzione $f(x) = \begin{cases} |x|^a e^{-|x|^a} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ è derivabile nel punto $x = 0$.
   Innanzi tutto, se $a = 0$ allora $f(x)$ è identicamente nulla e dunque è ovviamente derivabile.
   Per gli altri valori di a scriviamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^a}{x} e^{-|x|^a}.$$

   I limiti dei due fattori si calcolano facilmente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^a}{x} = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ \text{non esiste} & a \le 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} e^{-|x|^a} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

Dunque, per $a > 1$ il limite esiste ed è 0, mentre per $0 < a \leq 1$ il limite non esiste. Per $a < 1$ avremmo una forma indeterminata, ma il termine che tende a 0 è esponenziale mentre l'altro è polinomiale, dunque il limite del prodotto anche in questo caso esiste e vale 0.
In tutto, f è derivabile in 0 per $a \leq 0$ e $a > 1$ e quindi la risposta esatta è (a).

7. Trovare gli intervalli in cui la funzione $f(x) = 4e^x - e^{2x}$ è monotona crescente.
La derivata di f è $f'(x) = 4e^x - 2e^{2x}$. Gli intervalli in cui f è monotona crescente sono quelli in cui $f' > 0$.
Scrivendo $f'(x) = 2e^x(2 - e^x)$ otteniamo che $f'(x) > 0$ per $x < \log(2)$, dunque $f(x)$ è monotona crescente per $x < \log(2)$ e la risposta corretta è (a).

8. Trovare gli intervalli in cui la funzione $f(x) = \left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$ è monotona crescente.
Scrivendo la funzione come $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} & -1 < x \leq 0, x > 1 \\ -\dfrac{x}{x^2-1} & x < -1, 0 \leq x < 1 \end{cases}$ possiamo calcolare la sua derivata: $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & -1 < x < 0, x > 1 \\ \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & x < -1, 0 < x < 1 \end{cases}$. Poiché $f'(x)$ è sempre negativa nel primo intervallo di definizione e sempre positiva nel secondo intervallo, allora l'intervallo in cui f è monotona crescente coincide con il secondo intervallo di definizione, cioè $x < -1$ e $-1 < x < 0$.
Dunque, la risposta esatta è (b).

9. Trovare gli intervalli in cui la funzione $f(x) = \log\left(1 + \left|x^2 - 4\right|\right)$ è monotona crescente.
Scrivendo $f(x) = \begin{cases} \log\left(x^2-3\right) & x \leq -2, x \geq 2 \\ \log\left(5-x^2\right) & -2 < x < 2 \end{cases}$, possiamo facilmente calcolarne la derivata:
$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-3} & x < -2, x > 2 \\ \dfrac{-2x}{5-x^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$.
Nel primo intervallo di definizione di f, la derivata è positiva se e solo se $x > 0$, cioè per $x > 2$; nel secondo intervallo di definizione invece è positiva se e solo se $x < 0$, cioè per $-2 < x < 0$.
Dunque, $f(x)$ è monotona per $-2 < x < 0$ e $x > 2$ e la risposta esatta è (b).

10. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \cos(2x)$ nel punto $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0 è $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.
Poiché $f'(x) = -2\sin(2x)$, allora $f'(x_0) = -2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ e $f(x_0) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ e l'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0 è $y = -\sqrt{3}x + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$.
Dunque la risposta esatta è (a).

11. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log(\sin(x))$ nel punto $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
Essendo $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$, allora $f(x_0) = \log\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \log\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\log(2)}{2}$ e $f'(x_0) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1$.

Dunque, l'equazione della retta tangente è $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 = x - \dfrac{\log(2)}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ e la risposta esatta è (c).

12. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 2^{|x-1|}$ nel punto $x_0 = 0$.
La derivata di f è $f'(x) = \begin{cases} \log(2)2^{x-1} & x > 1 \\ -\log(2)2^{1-x} & x < 1 \end{cases}$, dunque $f'(0) = 2\log(2)$.
Pertanto, l'equazione della retta tangente è $y' = f'(0)x + f(0) = -2\log(2) + 2$ e la risposta corretta è (a).

13. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$ sull'intervallo $[0, 3]$.
I possibili punti di massimo o minimo sono i due estremi dell'intervallo e i punti dell'intervallo in cui f' si annulla.
La derivata f è $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$ che si annulla in $x = 1$ e $x = 4$, ma quest'ultimo non fa parte dell'intervallo che consideriamo.
Poiché $f(0) = 0$, $f(1) = 11$ e $f(3) = -9$, concludiamo che $\max\limits_{[0,3]} f = f(1) = 11$ e $\min\limits_{[0,3]} f = f(3) = -9$ e che la risposta corretta è (d).

14. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione $f(x) = 3|x| - x^2$ sull'intervallo $[-2, 2]$.
In questo caso bisogna considerare come possibili punti di massimo/minimo anche quelli in cui f non è derivabile, cioè $x = 0$.
Scrivendo $f(x) = \begin{cases} -3x - x^2 & x < 0 \\ 3x - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$, la sua derivata sarà $f'(x) = \begin{cases} -3 - 2x & x < 0 \\ 3 - 2x & x \geq 0 \end{cases}$.
Quest'ultima si annulla in $x = -\dfrac{3}{2}$ e $x = \dfrac{3}{2}$ e abbiamo $f\left(\pm\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$, mentre in $x = 0$ abbiamo $f(0) = 0$ e agli estremi dell'intervallo $f(\pm 2) = 2$.
Dunque, $\max\limits_{[-2,2]} f = f\left(\pm\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$ e $\min\limits_{[-2,2]} f = f(0) = 0$ e la risposta esatta è (b).

15. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione $f(x) = \sqrt{(3x - 2x^2)\, e^x}$ sull'intervallo $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$.
Agli estremi dell'intervallo abbiamo $f(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$. Poiché f è definita come una radice quadrata, non avrà valori negativi e dunque il suo valore minimo sarà proprio 0.
Per trovare il massimo di f, ne calcoliamo la derivata: $f'(x) = \dfrac{\left(2x^2 + x - 3\right) e^x}{2\sqrt{(3x - 2x^2)\, e^x}} = \dfrac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)e^x}{2\sqrt{(3x - 2x^2)\, e^x}}$.
L'unico punto in $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$ che annulla f' è $x = 1$ e dunque sarà necessariamente il punto in cui f raggiunge il suo massimo.
Riassumendo, $\min\limits_{\left[0,\frac{3}{2}\right]} f = f(0) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$, $\max\limits_{\left[0,\frac{3}{2}\right]} f = f(1) = \sqrt{e}$ e la risposta esatta è (c).