Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

LEZIONE 6 DEL 3 NOVEMBRE 2016
ARGOMENTO: DERIVATE

1. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \left(\log\left(1+\sqrt{|x|}\right)\right)^3$.
   La funzione è chiaramente derivabile per $x \neq 0$, in quanto composizione di funzioni derivabili. In $x = 0$ calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\sqrt{|x|}\right)^3}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\sqrt{|x|}\right)^3}{\left(\sqrt{|x|}\right)^3}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{|x|}\right)^3}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{|x|}\right)^3}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\mathrm{segno}(x)\sqrt{|x|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Dunque il limite esiste e quindi la funzione è derivabile anche il $x = 0$ e la risposta esatta è (a).

2. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \frac{x}{|x|+|x-1|}$.
   La funzione è chiaramente derivabile per $x \neq 0, 1$. In $x = 0$ il limite del rapporto incrementale è

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{|x|+|x-1|}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|+|x-1|} = 1,$$

   quindi $f(x)$ è derivabile in $x = 0$.
   In $x = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{|x|+|x-1|}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x-|x|-|x-1|}{(|x|+|x-1|)(x-1)} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{|x|+|x-1|}\lim_{x\to 1}-\frac{|x-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1}-\frac{|x-1|}{x-1}, \end{aligned}$$

ma quest'ultimo limite non esiste poiché vale 1 se calcolato per $x \to 1^-$ e -1 se calcolato per $x \to 1^+$.
Dunque, f è derivabile per ogni $x \neq 1$ e la rispota esatta è (c).

3. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione $f(x) = \left|x^2 - x\right| \sin(x)$.
f è sicuramente derivabile in tutti i punti diversi dagli zeri di $x^2 - x$, che sono $x = 0, 1$.
In $x = 0$ il limite del rapporto incrementale vale

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|x^2 - x\right| \sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \lim_{x\to 0} \left|x^2 - x\right| = \lim_{x\to 0} \left|x^2 - x\right| = 0,$$

dunque la funzione è derivabile in 0.
In $x = 1$ invece abbiamo

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x} = \lim_{x\to 1} \frac{\left|x^2 - x\right| \sin(x)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} |x| \sin(x) \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1} = \sin(1) \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1},$$

ma quest'ultimo limite non esiste e dunque la funzione non è derivabile in $x = 1$ e la risposta esatta è (c).

4. Trovare i valori del parametro reale a per cui la funzione $f(x) = \left|x^3 - ax\right|$ è derivabile nel punto $x = 0$.
La derivata di f in 0 vale

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left|x^3 - ax\right|}{x} = \lim_{x\to 0} \left|x^2 - a\right| \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} |a| \frac{|x|}{x}.$$

Quest'ultimo limite esiste (e vale 0) solo per $a = 0$, dunque la funzione è derivabile nell'origine solo per $a = 0$ e la risposta esatta è (c).

5. Trovare i valori del parametro reale a per cui la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \geq 0 \\ \dfrac{x + 1 - \cos(x)}{x} & x < 0 \end{cases}$
è derivabile nel punto $x = 0$.
La funzione sarà derivabile se i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale coincidono: a destra abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a,$$

mentre a sinistra abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+1-\cos(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

I due limiti coincidono per $a = \dfrac{1}{2}$, dunque la funzione sarà derivabile solo per questo valore del parametro e la risposta esatta è (b).

6. Trovare i valori del parametro reale a per cui la funzione $f(x) = \begin{cases} |x|^a \arctan\left(\dfrac{1}{|x|}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
è derivabile nel punto $x = 0$.
Il limite del rapporto incrementale in 0 vale:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^a}{x} \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Poiché $\lim_{x \to 0^\pm} \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$, allora il limite esisterà (e varrà 0) se e solo se $\lim_{x \to 0} \frac{|x|^a}{x} = 0$, che è verificata per $a > 1$.
La risposta esatta è dunque (d).

7. Trovare gli intervalli in cui la funzione $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 4x$ è monotona crescente.
Gli intervalli in cui f è monotona crescente sono quelli in cui la sua derivata è positiva.
Poiché vale $f'(x) = 2e^{2x} - 6e^x + 4 = 2(e^x - 1)(e^x - 2)$, allora $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $x > \log(2)$ e la risposta esatta è (a).

8. Trovare gli intervalli in cui la funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x}}$ è monotona crescente.
La derivata di f è $f'(x) = \frac{2x - x^2}{2\sqrt{\frac{x^2}{1-x}}}$, che è positiva per $0 < x < 1$, dunque f è monotona crescente per $0 < x < 1$ e la risposta esatta è (c).

9. Trovare gli intervalli in cui la funzione $f(x) = \left|x^2 - 3\right| + 2|x|$ è monotona crescente.
Scrivendo f come $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 - 2x & x \leq -\sqrt{3} \\ -x^2 + 3 - 2x & -\sqrt{3} < x < 0 \\ -x^2 + 3 + 2x & 0 \leq x < \sqrt{3} \\ x^2 - 3 + 2x & x \geq \sqrt{3} \end{cases}$, la sua derivata vale $f'(x) =$
$\begin{cases} 2x - 2 & x < -\sqrt{3} \\ -2x - 2 & -\sqrt{3} < x < 0 \\ -2x + 2 & 0 < x < \sqrt{3} \\ 2x + 2 & x > \sqrt{3} \end{cases}$.
f' è dunque positiva per $-\sqrt{3} < x < -1$, $0 < x < 1$ e $x > \sqrt{3}$, quindi la risposta esatta è (d).

10. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^{x-1} + \log(x)$ nel punto $x_0 = 1$.
L'equazione della retta tangente al grafico di f in x_0 è $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$.
In questo caso, $f'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x}$, dunque $f'(1) = 2$, $f(1) = 1$ e quindi l'equazione della retta è $y = 2x - 1$ e la risposta esatta è (c).

11. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = |\sin(x)| + |\cos(x)|$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
Poiché il seno e il coseno sono entrambi positivi tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, quindi in particolare vicino a $\frac{\pi}{4}$, allora sarà sufficiente considerare $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.
Abbiamo $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$, dunque $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, dunque l'equazione della retta è $y = \sqrt{2}$ e la risposta esatta è (a).

12. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log|\log|x||$ nel punto $x_0 = -\frac{1}{e}$.
In un intorno di x_0 la funzione vale $f(x) = \log(-\log(-x))$, dunque basterà considerare quest'ultima al posto della prima definizione di f.
La sua derivata è $f'(x) = \frac{1}{x\log(-x)}$ e in $-\frac{1}{e}$ vale e, mentre $f\left(-\frac{1}{e}\right) = 0$, dunque ottengo $y = ex + 1$ e la risposta esatta è (d).

13. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione $f(x) = \begin{cases} x^2(\log(x))^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ sull'intervallo $[0, 1]$.
I possibili punti di massimo/minimo sono: quelli dove f' si annulla, i due estremi dell'intervallo, i punti in cui f non è derivabile (che, in questo caso, non sono presenti nell'intervallo che consideriamo).
Agli estremi dell'intervallo, $f(x)$ vale 0 sia in $x = 0$ che in $x = 1$. Inoltre, la derivata di f è $f'(x) = 2x \log(x)(1 + \log(x))$, che si annulla in $x = -\dfrac{1}{e}$ con $f\left(-\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e^2}$.
Dunque, $\max\limits_{[0,1]} f = f\left(-\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e^2}$ e $\min\limits_{[0,1]} f = f(0) = f(1) = 0$ e la risposta esatta è (a).

14. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & x \geq 0 \\ x^2 + 5x & x < 0 \end{cases}$ sull'intervallo $[-2, 2]$.
Agli estremi del dominio i valori di f sono: $f(-2) = -6$ e $f(2) = 2$, inoltre f non è derivabile in $x = 0$ e in questo punto abbiamo $f(0) = 0$. Negli altri punti la derivata di f è $f'(x) = \begin{cases} -2x + 3 & x \geq 0 \\ 2x + 5 & x < 0 \end{cases}$ e il suo unico zero in $[-2, 2]$ è $x = \dfrac{3}{2}$, in cui abbiamo $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$.
Dunque abbiamo $\max\limits_{f} = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{4}$ e $\min\limits_{f} = f(-2) = -6$, pertanto la risposta esatta è (c).

15. Trovare il massimo ed il minimo valore della funzione $f(x) = |x|\sqrt{1 - x^2}$ sull'intervallo $[-1, 1]$.
Agli estremi dell'intervallo abbiamo $f(\pm 1) = 0$, e anche in $x = 0$ (dove non è derivabile) abbiamo $f(0) = 0$. Negli altri punti invece $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}} & x > 0 \\ \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} & x < 0 \end{cases}$ che si annulla in $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
Abbiamo quindi $\max\limits_{[-1,1]} f = f\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\min\limits_{[-1,1]} f = f(\pm 1) = f(0) = 0$, dunque la risposta esatta è (a).