Sapienza - Università di Roma - Corso di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica

Soluzioni degli esercizi di Analisi Matematica I

A.A. 2016 – 2017 - Docente: Luca Battaglia

Lezione 8 del 24 Novembre 2016
Argomento: Serie

1. Discutere la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2 + \log n}$
   Innanzi tutto la serie è a termini positivi, dunque convergenza semplice e assoluta si equivalgono. Il termine n-esimo della serie ha lo stesso andamento asintotico di $\frac{\log(n)}{n^2}$, che a sua volta va a zero più rapidamente di $\frac{1}{n^a}$ per ogni $1 < a < 2$. Dunque, poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} < +\infty$ per $1 < a < 2$, allora dal criterio del confronto la serie di partenza converge (assolutamente).

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$
   La serie ha termini di segno alterno e il termine n-esimo $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ tende a zero in modo decrescente. Dunque, dal criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.
   La serie non converge assolutamente perché il termine n-esimo ha lo stesso andamento asintotico di $\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} = +\infty$.

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\arctan \frac{1}{n}\right)$
   La serie è a termini positivi e diverge a $+\infty$ perché il termine n-esimo si comporta come $\frac{1}{n}$: infatti, dagli sviluppi asintotici di $\sin x$ e $\arctan x$ intorno a $x = 0$ abbiamo
   $$\sin\left(\arctan \frac{1}{n}\right) \sim \arctan \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

2. Discutere la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie al variare del parametro reale a:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{na}$
   Innanzi tutto, se $a > 0$ la serie non converge perché il termine n-esimo non va a 0.
   Se invece $a < 0$, allora la serie converge (assolutamente) per il criterio della radice, perché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n2^{na}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{na}} = 2^a < 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin(2a))^n}{n}$

La serie converge assolutamente se $|\sin(2a)| < 1$, cioè se $2a \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ per qualche intero k, ovvero $a = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Se $a = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che diverge mentre per $a = \frac{3}{4}\pi + k\pi$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge per Leibniz ma non assolutamente.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^a+1}{n^a+2}\right)$

Innanzi tutto, per $a \leq 0$ la serie non è infinitesima e dunque diverge.

Per $a > 0$, riscrivendo il termine n-esimo come $\log\left(1 - \frac{1}{n^a+2}\right)$, otteniamo che quest'ultimo ha l'andamento asintotico di $\frac{1}{n^a}$ e dunque converge (assolutamente) se e solo se $a > 1$.