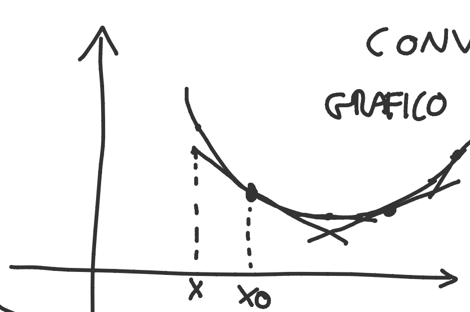
# CONVESSITÀ




CONVESSA
GRAFICO SOPRA LE RETTE TANGENTI

**DEFINIZIONE** UNA FUNZIONE $f$ DERIVABILE IN $[a,b]$ SI DICE CONVESSA SE $f(x) \geq \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{RETTA TANGENTE IN } x_0}$ $\forall x, x_0 \in [a,b]$

$f$ SI DICE CONCAVA SE $f(x) \leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $\forall x, x_0 \in [a,b]$

CONCAVA

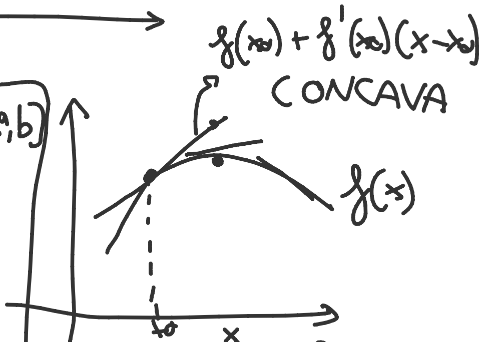
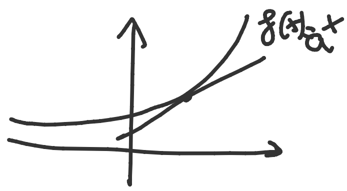



GRAFICO DI $f$ SOTTO LE RETTE TANGENTI IN OGNI PUNTO

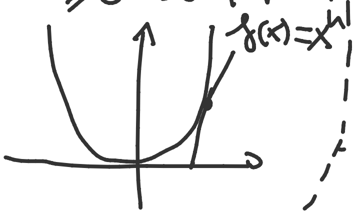
**CRITERIO DI CONVESSITÀ** SE $f$ È DERIVABILE IN $[a,b]$ ED È DERIVABILE DUE VOLTE IN $(a,b)$, ALLORA: ① $f$ È CONVESSA (CONCAVA) IN $[a,b]$ SE E SOLO SE ② $f'$ È CRESCENTE (DECRESCENTE) IN $[a,b]$ SE E SOLO SE ③ $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) IN $(a,b)$

(GIÀ VISTO IERI CHE ② E ③ SI EQUIVALGONO: APPLICO IL CRITERIO DI MONOTONIA A $f'$)

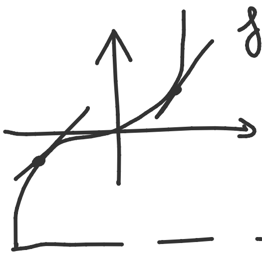
**ESEMPI** $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = (\ln a)\, a^x \Rightarrow f''(x) = (\ln a)^2 a^x \geq 0$ CONVESSA

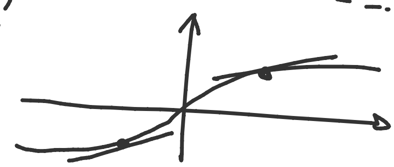



$f(x) = x^n$ $\quad f'(x) = n x^{n-1}$ $\quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ SE $n$ PARI



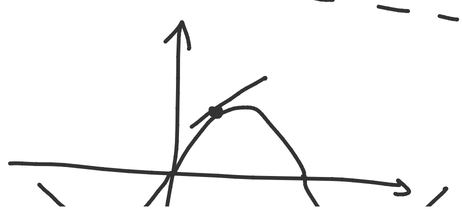

$n$ DISPARI $\Rightarrow f(x)$ CONVESSA SU $[0,+\infty)$
$f(x)$ CONCAVA SU $(-\infty,0]$

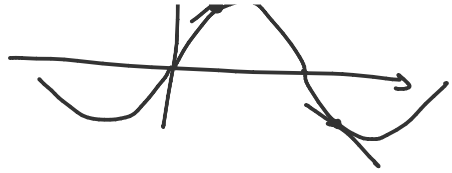




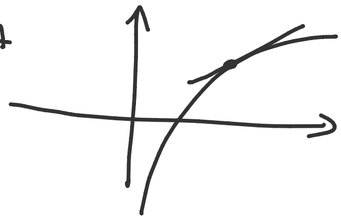
$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ CONCAVA SE $x \geq 0$, CONVESSA SE $x \leq 0$

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\sin x$

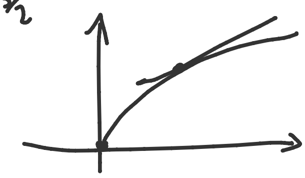




$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ CONCAVA



$f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x^{3/2}}$



$f(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\ln a > 0$ SE $a > 1 \Rightarrow f'' \leq 0$ CONCAVO

$\ln a < 0$ SE $a < 1 \Rightarrow f'' \geq 0$ CONVESSA

## DIM. CRITERIO DI CONVESSITÀ

① $\Rightarrow$ ② SUPPONIAMO CHE $f$ SIA CONVESSA. FISSO $x_1, x_2$ CON $x_1 < x_2$ VOGLIO AVERE $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. APPLICO LA DEF. DI CONVESSITÀ

(*) $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$

(**) $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$

(*) + (**) $\cancel{f(x_2) + f(x_1)} \geq \cancel{f(x_1) + f(x_2)} + (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1)$

$(f'(x_1) - f'(x_2))\cancel{(x_2 - x_1)} \leq 0 \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

$x_2 > x_1$

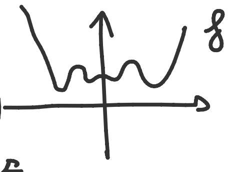
② $\Rightarrow$ ① SUPPONGO $f'$ CRESCENTE, VERIFICO LA CONVESSITÀ CON $x, x_0$ QUALSIASI. APPLICO IL TEO. LAGRANGE SU $[x_0, x]$: $\exists\, x_1 \in (x_0, x)$ TALE CHE $f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$, POICHÉ $f'$ È CRESCENTE $f'(x_1) \geq f'(x_0)$

$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$, CIOÈ $f$ CONVESSA.

# STUDIO DI FUNZIONE

# STUDIO DI FUNZIONE

- DOMINIO
- SEGNO + INTERSEZIONE CON GLI ASSI ($f(x)=0$ OPPURE $x=0$)
- SIMMETRIE E PERIODICITÀ EVENTUALI
- LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO (+ ASINTOTI EVENTUALI)
- $f'$ → MAX/MIN, MONOTONIA DELLA FUNZIONE
- $f''$ → CONCAVITÀ, CONVESSITÀ
  (EVENTUALI PUNTI DI NON DERIVABILITÀ O DISCONTINUITÀ)

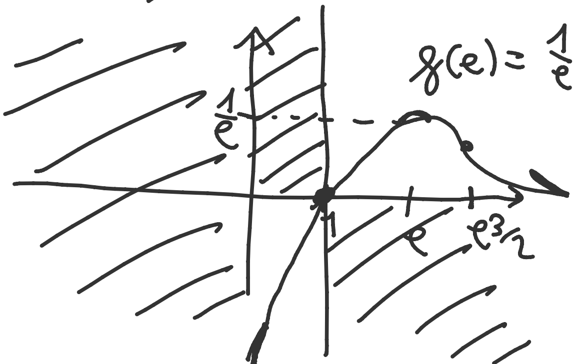



$$\boxed{f(x) = \frac{\ln x}{x}}$$

$\ln x \to x>0$

$x \to x \neq 0$

<u>DOMINIO:</u> $\{x>0\} = (0, +\infty)$




<u>SEGNO:</u> DENOM. $>0$ SUL DOMINIO

NUMER. $\begin{cases} \ln x > 0 & \text{SE } x>1 \\ \ln x < 0 & \text{SE } 0<x<1 \\ \ln x = 0 & \text{SE } x=1 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) > 0$ SE $x<1$

$f(x) < 0$ SE $0<x<1$

$f(x)=0$ SE $x=1$ (INTERSEZIONE ASSE $x$)

NON C'È INTERSEZIONE CON ASSE $y$ PERCHÈ $f$ NON È DEFINITA IN $x=0$.

<u>SIMMETRIE E PERIODICITÀ</u> NON CE NE SONO

(NON HA SENSO CHIEDERSI SE $f(-x) = \pm f(x)$ PERCHÈ $f(x)$ NON È DEFINITA PER $x<0$ ⇒ NÈ PARI NÈ DISPARI)

<u>ESTREMI DEL DOMINIO</u>

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \overset{\ln x}{(-\infty)} \cdot \overset{\frac{1}{x}}{(+\infty)} = \underline{-\infty}$$

ASINTOTO VERTICALE $x=\underline{0}$
(GRAFICO "SCHIACCIATO" SU UNA RETTA VERTICALE")

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \underline{0} \quad \text{(GERARCHIA DEGLI INFINITI)}$$

ASINTOTO ORIZZONTALI $y=\underline{0}$
(GRAFICO "SCHIACCIATO" SU RETTA ORIZZONTALE)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \boxed{\frac{1-\ln x}{x^2}}$$

SEGNO DI $f'$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^{2} - (1-\ln x)\,2x}{x^{4}} = \boxed{\frac{-3+2\ln x}{x^3}}$$

$x$ $\quad \boxed{x^2}$ $\qquad f''(x) = \dfrac{\ldots}{x^{\cancel{4}\,3}} = \boxed{\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}}$

$\boxed{\text{SEGNO DI } f'}$

$\rightarrow$ DENOM. $>0$

NUM. $1-\ln x > 0 \iff \ln x < 1 \iff x < e$

| | $0$ | | $e$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | MAX | $\searrow$ |

$f$ CRESCENTE $(0,e)$

$f$ DECRESCENTE $(e,+\infty)$

$\boxed{\text{SEGNO DI } f''}$

DENOM. $>0$ $\qquad$ NUM. $-3+2\ln x > 0 \iff \ln x > \frac{3}{2} \iff x > e^{\frac{3}{2}}$

| | $0$ | | $e^{\frac{3}{2}}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | | $\frown$ | | $\smile$ |

CONCAVA $(0,e^{\frac{3}{2}})$

CONVESSA $(e^{\frac{3}{2}},+\infty)$