Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Esercitazione 1 – 2 del 6 – 7 Marzo 2018
Argomento: Derivate

1. Dimostrare, utilizzando la definizione di rapporto incrementale, che le seguenti funzioni sono derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$ e calcolarne la derivata:
   (a) $f(x) = a^x \quad (a > 0)$.
   (b) $f(x) = \sin x$;
   (c) $f(x) = \cos x$;

2. Calcolare, utilizzando la linearità della derivata e il primo punto del precedente esercizio, la derivata delle funzioni $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3. Calcolare, utilizzando la regola di derivazione del prodotto e il primo esercizio, la derivata delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x) = x^n \sin x \quad (n \in \mathbb{N})$;
   (b) $g(x) = e^{cx} \log |x| \quad (c \in \mathbb{R})$;
   (c) $h(x) = e^{cx} \cos x \quad (c \in \mathbb{R})$.

4. Dimostrare che la derivata del prodotto di tre funzioni fgh è data da $f'gh + fg'h + fgh'$. Dedurne una simile regola per il prodotto di un numero arbitrario di funzioni $f_1 f_2 \dots f_n$.

5. Dimostrare, utilizzando la regola di derivazione del quoziente, che le seguenti funzioni sono derivabili e calcolarne la derivata:
   (a) $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{N}\right)$;
   (b) $f(x) = \cot x = \dfrac{1}{\tan x} \qquad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N})$;
   (c) $f(x) = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \qquad (x \in \mathbb{R})$;

6. Sia $f : A \to B$ derivabile in $x_0 \in A$ e $g : B \to \mathbb{R}$ derivabile in $y_0 = f(x_0) \in B$. Dimostrare che la composizione $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 e la sua derivata vale

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0).$$

   Dedurne che, se f è invertibile e $g = f^{-1}$ è l'inversa di f, allora g è derivabile in ogni $y_0 = f(x_0)$ tali che $f'(x_0) \neq 0$ e vale $\left(f^{-1}\right)^{-1}(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

7. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili con $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che le funzioni $F(x) := \log |f(x)|$ e $G(x) = e^{g(x)}$ sono derivabili e calcolarne la derivata.
   Calcolare infine la derivata di x^x per $x > 0$.

8. Dimostrare, utilizzando la regola di derivazione dell'inversa, che le seguenti funzioni sono derivabili e calcolarne la derivata:
   (a) $f(x) = \arctan x \qquad (x \in \mathbb{R});$
   (b) $f(x) = \arcsin x \qquad (|x| < 1);$
   (c) $f(x) = \arccos x \qquad (|x| < 1).$

9. Sia $f(x) = \begin{cases} x^\alpha & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ per $\alpha > 0$.
   Dire, al variare di α, per quali x la funzione è derivabile e calcolarne la derivata $f'(x)$.

10. Sia $f(x) := \begin{cases} x(-\log x)^\beta & x \in (0,1) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.
    Dire per quali valori di β la funzione è continua in $x = 0$ e/o in $x = 1$ e per quali è derivabile.

11. Sia $f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.
    Dire per quali x la funzione è derivabile e calcolarne la derivata $f'(x)$. Dire per quali x la derivata f' è continua.