# Capitolo 8

# Teoria dell'integrazione di Riemann

In questo capitolo discutiamo la classica (e la più "elementare") teoria dell'integrazione di funzioni reali, dovuta, essenzialmente, a B. Riemann, teoria che nasce dalla antica necessità di formalizzare ed estendere il calcolo di "aree piane". Sebbene la classe di funzioni che risulteranno essere integrabili secondo Riemann è piuttosto ristretta (e fondamentalmente legata alla continuità), la teoria dell'integrazione di Riemann è un capitolo imprescindibile dei fondamenti dell'analisi matematica e comunque sufficiente per capire – ed apprezzare! – l'intima connessione tra i due strumenti fondamentali del calcolo differenziale: le derivate e gli integrali.

## 1 L'integrale di Riemann

### 1.1 Definizioni

**Definizione 8.1** (i) *Sia $E$ un intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Una* **partizione** *di $E$ è un insieme finito di intervalli* $\mathrm{P} := \{I_j : 1 \leq j \leq n\}$ *a due a due disgiunti tali che* $\bigcup_{i=1}^{n} I_i = E$*; se* $\sup I_i = \inf I_{i+1}$ *per ogni* $1 \leq i < n$ *diremo che la partizione* $\mathrm{P}$ *è una* **partizione ordinata**. *La famiglia di tutte le partizioni di $E$ si denota con $\mathcal{P}(E)$.*
*Il numero positivo*[1] $\delta := \max\{|I_j| \,\big|\, 1 \leq j \leq n\}$ *si chiama* **diametro** *della partizione* $\mathrm{P}$ *e si denota* $\mathrm{diam}\,(\mathrm{P})$.
(ii) *Se* $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$ *diremo che* $\mathrm{P}'$ *è un* **raffinamento** *di* $\mathrm{P}$ *o che* $\mathrm{P}'$ *è più fine di* $\mathrm{P}$ (*o che* $\mathrm{P}$ *è meno fine di* $\mathrm{P}'$)*, e scriveremo* $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'$*, se ogni intervallo di* $\mathrm{P}$ *ammette una partizione formata di intervalli di* $\mathrm{P}'$*;* $\mathrm{P}' \succ \mathrm{P}$ *significa* $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'$.
(iii) *Se* $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$, **il raffinamento di** $\mathrm{P}$ **e** $\mathrm{P}'$ *è l'insieme di intervalli*

$$P \wedge P' := \{I \cap I' \,\big|\, I \in \mathrm{P}, I' \in \mathrm{P}' \ \text{ con } I \cap J \neq \emptyset\} \ . \tag{8.1}$$

(iv) *Sia $E$ un intervallo limitato,* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e* $\mathrm{P} = \{I_j : 1 \leq j \leq n\}$ *una partizione di $E$. Chiamiamo, rispettivamente,* **somma inferiore di Riemann** *e* **somma**

[1] Si ricorda che, per un intervallo $I$, $|I| = \ell(I) = \mathrm{mis}(I)$ denota la sua lunghezza o misura, data da $(\sup I) - (\inf I)$.

**superiore di Riemann** *(di $f$ su $E$ rispetto alla partizione* P) *i numeri reali*

$$\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) := \sum_{i=1}^{n} (\inf_{I_i} f)|I_i| \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) := \sum_{i=1}^{n} (\sup_{I_i} f)|I_i| \ . \tag{8.2}$$

**Osservazione 8.2** (i) Chiaramente, è sempre possibile, rinumerando gli intervalli di una partizione, ottenere una partizione ordinata.
(ii) Se $\mathrm{P} := \{I_j : 1 \le j \le n\}$ è una partizione dell'intervallo limitato $I$ si ha che

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| = |I| \ , \tag{8.3}$$

infatti, assumendo che P sia ordinata e ponendo $a_j = \inf I_j$ e $b_j = \sup I_j$ si ha: $a_1 = \inf I$, $b_n = \sup I$, $b_j = a_{j+1}$ e

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) + (b_n - a_n) = b_n - a_1 = |I|.$$

(ii) La relazione "$\prec$" è una relazione d'ordine parziale su $\mathcal{P}(E)$.
Non si confonda l'ordine totale "$\le$" tra gli intervalli di una data partizione con l'ordine parziale "$\prec$" tra le partizioni di $\mathcal{P}(E)$.
Chiaramente, se $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'$, $\#\mathrm{P} \le \#\mathrm{P}'$.
(iv) Se $\mathrm{P} = \{I_j \big| j \le n\} \prec \mathrm{P}'$, per ogni $j$ esistono intervalli $I_{ji} \in \mathrm{P}'$ con $i \le n_j$ ($n_j$ opportuno) tali che $I_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} I_{ji}$ e $\mathrm{P}' = \{I_{ji} \big| j \le n, i \le n_j\}$.
(v) Sia $\mathrm{P} = \{I_j \big| 1 \le j \le n\}$ e $\mathrm{P}' = \{I'_i \big| 1 \le i \le m\}$. Poiché l'intersezione di intervalli o è vuota o è un intervallo, ed essendo

$$\bigcup_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}} I_j \cap I'_i = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m} I_j \cap I'_i = \bigcup_{j=1}^{n} I_j = E \ ,$$

si ha che $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$.
Quindi dalla definizione segue che $\mathrm{P} \prec \mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$, $\mathrm{P}' \prec \mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$: infatti, è facile verificare che $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ *è la partizione meno fine che raffina simultaneamente* P *e* P': se $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}''$ e $\mathrm{P}' \prec \mathrm{P}''$ allora $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}' \prec \mathrm{P}''$.

**Esercizio 8.1** Siano $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$. Dimostrare che $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$ è la partizione meno fine di $E$ che raffina simultaneamente P e P'.

**Lemma 8.3** *Sia $E$ un intervallo limitato di $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)$. Si ha che:*
(i) *se $\mathrm{P} \prec \mathrm{P}'$, allora*

$$\begin{cases} \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \le \underline{S}_E(f,\mathrm{P}') \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}') \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ , & (\mathrm{P} \prec \mathrm{P}') \\ \overline{S}_E(f,\mathrm{P}') - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}') \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ , & (\mathrm{P} \prec \mathrm{P}') \ . \end{cases} \tag{8.4}$$

(ii) $\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}')$ .

Si noti che in (ii) non abbiamo assunto alcuna relazione tra P e P′.

**Dimostrazione** (i): Siano P e P′ come in (iv)–Osservazione 8.2. Allora, poiché $\inf_{I_j} f \leq \inf_{I_{ji}} f$ e $\sup_{I_j} f \geq \sup_{I_{ji}} f$, si ha che

$$\begin{aligned}\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) &= \sum_{j=1}^{n}(\inf_{I_j} f)|I_j| \overset{(8.3)}{=} \sum_{j=1}^{n}(\inf_{I_j} f)\sum_{i=1}^{n_j}|I_{ji}| \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}(\inf_{I_{ji}} f)|I_{ji}| = \underline{S}_E(f,\mathrm{P}')\\ \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) &= \sum_{j=1}^{n}(\sup_{I_j} f)|I_j| \overset{(8.3)}{=} \sum_{j=1}^{n}(\sup_{I_j} f)\sum_{i=1}^{n_j}|I_{ji}| \geq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j}(\sup_{I_{ji}} f)|I_{ji}| = \overline{S}_E(f,\mathrm{P}')\ ,\end{aligned}$$

il che dimostra la prima riga di (8.4); la seconda riga è conseguenza immediata della prima. Dal punto precedente e da (v)–Osservazione 8.2 segue che

$$\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \leq \underline{S}_E(f,\mathrm{P}\wedge\mathrm{P}') \leq \overline{S}_E(f,\mathrm{P}\wedge\mathrm{P}') \leq \overline{S}_E(f,\mathrm{P}')\ , \quad \forall\ \mathrm{P},\mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E)\ . \tag{8.5}$$

Il lemma è dimostrato. ∎

Dunque per ogni $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$, $\overline{S}_E(f,\mathrm{P})$ è un maggiorante dell'insieme di numeri $\{\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \big| \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\}$, mentre $\underline{S}_E(f,\mathrm{P})$ è un minorante dell'insieme di numeri $\{\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) \big| \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\}$. Alla luce di tale osservazione poniamo:

**Definizione 8.4** *Sia $E$ un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Il numero reale $\mathcal{J}_E^-(f) := \sup\{\underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \big| \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\}$ si chiama* **integrale di Riemann inferiore di $f$ su $E$**; *il numero reale $\mathcal{J}_E^+(f) := \inf\{\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) \big| \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\}$ si chiama* **integrale di Riemann superiore di $f$ su $E$** *e ((ii)–Lemma 8.3):*

$$\mathcal{J}_E^-(f) \leq \mathcal{J}_E^+(f)\ . \tag{8.6}$$

*Se in (8.6) vale l'uguaglianza diremo che $f$* **è integrabile secondo Riemann su $E$** *(ed in tal caso chiameremo tale valore comune* **l'integrale di Riemann di $f$ su $E$**.
*L'insieme delle funzioni $f$ integrabili secondo Riemann sull'intervallo $E$ si denota con $\mathcal{R}(E)$ e l'integrale di una funzione $f \in \mathcal{R}(E)$ con uno dei seguenti simboli*

$$\mathcal{J}_E(f)\ , \qquad \int_E f\ , \qquad \int_E f(x)dx\ . \tag{8.7}$$

In questo capitolo considereremo solo la teoria dell'integrazione di Riemann e quindi d'ora in avanti *useremo il temine "integrabile" come sinonimo di "integrabile secondo Riemann"*.

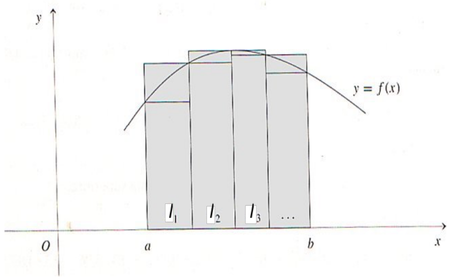


Figura 8.1: Partizione e somma superiore/inferiore di Riemann

**Esempio 8.5** (i) Siano $a < b$ e $h > 0$ e sia $f : x \in E := [a, b] \mapsto h$ la funzione costante di valore $h$ su $[a, b]$. Se prendiamo la partizione banale $\mathrm{P} = \{[a, b]\}$ si ha $\underline{S}_E(f, \mathrm{P}) = h(b-a) = \overline{S}_E(f, \mathrm{P})$ e quindi $f$ è integrabile e il suo integrale $\int_E f = (b-a)h$ che non è altro che l'area del rettangolo $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, a \le x \le b \ , \ 0 \le y \le h\}$.

(ii) Sia $E = [0, 1]$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ tale che, $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap E$ e $f(x) = 0$ altrimenti. Chiaramente, per ogni intervallo $I \subseteq E$ che non sia degenere (ossia che non sia costituito da un solo punto) si ha che $\sup_I f = 1$ e $\inf_I f = 0$ (essendoci in ogni intervallo non degenere di $\mathbb{R}$ sia numeri razionali che numeri irrazionali). Dunque, per ogni partizione $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$ si ha che $\underline{S}_E(f, \mathrm{P}) = 0 < 1 = \overline{S}_E(f, \mathrm{P})$ e dunque $f$ non è integrabile su $E$ essendo $\mathcal{J}_E^-(f) = 0 < \mathcal{J}_E^+(f) = 1$.

**Osservazione 8.6** L'Esempio 8.5–(i) ha un'importante generalizzazione, per formulare la quale abbiamo bisogno di alcune definizioni:

**Definizione 8.7** (a) *Se* $\emptyset \ne A \subseteq \mathbb{R}$, *si chiama* **funzione caratteristica di** $A$ (*o* **funzione indicatrice di** $A$) *la funzione*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in A^c \ . \end{cases} \tag{8.8}$$

(b) *Una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* **semplice** *o* **costante a tratti** *se*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{I_j}(x) \tag{8.9}$$

*con* $\alpha_j \in \mathbb{R}$ *e* $I_j$ *intervalli limitati a due a due disgiunti. La classe delle funzioni semplici si denota con* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}(E)$, *con* $E$ *intervallo, denota la classe delle funzioni semplici* (8.9) *con* $\cup I_j \subseteq E$.

In particolare, se $f \in \mathcal{S}(E)$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \notin E$.
*Le funzioni semplici sono integrabili*: infatti se $f \in \mathcal{S}(E)$ è come in (8.9), possiamo prendere una partizione $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$ che contenga tutti gli intervalli $\{I_j\}$ e per tale partizione si ha (essendo ovviamente $\sup_{I_j} f = \inf_{I_j} f = \alpha_j$) $\underline{S}_E(f, \mathrm{P}) = \overline{S}_E(f, \mathrm{P})$ e dunque per il 1° criterio di integrabilità $f \in \mathcal{R}(E)$ ed inoltre dalla definizione di integrale di Riemann segue che

$$\int_E f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |I_j| \ . \tag{8.10}$$

Dunque *l'integrale di una funzione semplice si può interpretare come la somma algebrica ("con segno") delle aree dei rettangoli di base* $|I_j|$ *e altezza* $|\alpha_j|$.

## 1.2 Caratterizzazioni dell'integrabilità

(i) Sia $E$ un intervallo limitato. Dalla definizione di estremo superiore/inferiore e dalla definizione di integrale di Riemann segue immediatamente che:

*$f \in \mathcal{R}(E)$ se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathcal{P}(E) \big| \quad \overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}') < \varepsilon \ . \tag{8.11}$$

Inoltre, in vista di (8.5), possiamo prendere *la stessa* partizione in (8.11) (e cioè $\mathrm{P} \wedge \mathrm{P}'$) e dunque si ha il seguente

1° **Criterio di integrabilità:** $f \in \mathcal{R}(E)$ *se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E) \big| \quad \overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) < \varepsilon \; . \tag{8.12}$$

(ii) Il numero $\overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P})$ si può scrivere in maniera più esplicita: se $\mathrm{P} = \{I_j \big| j \le n\}$, allora

$$\overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{n} \big( \sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \big) |I_j| \; . \tag{8.13}$$

**Definizione 8.8** *Sia $f$ una funzione limitata su un insieme limitato $A$. Il numero $\sup_A f - \inf_A f$ si chiama* **oscillazione di $f$ su $A$** *e si denota con* $\mathrm{osc}\,(f, A)$.

Segue facilmente (sempre dalla definizione di sup/inf) che[2]

$$\mathrm{osc}\,(f, A) := \sup_A f - \inf_A f = \sup_{x,y \in A} \big( f(x) - f(y) \big) = \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)| \; . \tag{8.14}$$

Quindi il 1° Criterio di integrabilità si può riformulare come segue:

2° **Criterio di integrabilità:** $f \in \mathcal{R}(E)$ *se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \mathrm{P} = \{I_j \big| j \le n\} \in \mathcal{P}(E) \Big| \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{osc}\,(f, I_j) |I_j| < \varepsilon \; . \tag{8.15}$$

**Esercizio 8.2** (i) Dimostrare le uguaglianze in (8.14).
(ii) Dimostrare che $\mathrm{osc}\,(f, A) = \mathrm{osc}\,(-f, A)$
(iii) Dimostrare che $\mathrm{osc}\,(f + g, A) \le \mathrm{osc}\,(f, A) + \mathrm{osc}\,(g, A)$.

**Suggerimento**: (i): da $\inf_A f - \sup_A f \le f(x) - f(y) \le \sup_A f - \inf_A f$, $\forall x, y \in A$ segue che $\sup_{x,y \in A} \big( f(x) - f(y) \big) \le \sup_A f - \inf_A f$ (e per simmetria $\sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)| \le \sup_A f - \inf_A f$). Da $f(x') - f(y') \le |f(x') - f(y')| \le \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$, prendendo il sup su $x', y' \in A$ segue che $\sup_A f - \inf_A f \le \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$.

**Osservazione 8.9** Dalla definizione di integrale segue che, se $f \in \mathcal{R}(E)$ e $\varepsilon$ e $\mathrm{P} = \{I_j\}$ sono come in (8.12), allora per ogni $\xi_i \in I_i$ si ha che[3]

$$\Big| \int_E f - \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) |I_j| \Big| < \varepsilon \; . \tag{8.16}$$

**Definizione 8.10** *La somma in (8.16) si chiama* **somma di Riemann rispetto alla partizione** $\mathrm{P} = \{I_j\}$ **e la scelta di punti** $\{\xi_j\}$.

[2] Vedi Es. 8.2.
[3] Infatti, i due numeri $\int_E f$ e $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$ appartengono entrambi all'intervallo $\big[\underline{S}_E(f, \mathrm{P}), \overline{S}_E(f, \mathrm{P})\big]$.

## 1.3 Proprietà fondamentali delle funzioni integrabili

**Proposizione 8.11** *Sia $E$ un intervallo limitato, $f, g \in \mathcal{R}(E)$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Allora:*

(i) $af + bg \in \mathcal{R}(E)$ *e* $\displaystyle\int_E (af+bg) = a\int_E f \ + \ b\int_E g$*;*

(ii) $f_\pm$*,* $|f|$*,* $\max\{f,g\}$*,* $\min\{f,g\}$ *e* $fg$ *sono integrabili;*

(iii) *Se* $f \le g$ *allora* $\displaystyle\int_E f \le \int_E g$*;*

(iv) $\displaystyle\Big|\int_E f\Big| \le \int_E |f|$*;*

(v) *per ogni intervallo* $I \subseteq E$*,* $f$ *è integrabile su* $I$*. Inoltre se* $\{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ *si ha*

$$\int_E f = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f \ . \tag{8.17}$$

**Dimostrazione** (i) Dimostriamo prima che $af \in \mathcal{R}(E)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e poi che $f+g \in \mathcal{R}(E)$ (per ogni $f, g \in \mathcal{R}(E)$): da queste due proprietà segue che $af + bg \in \mathcal{R}(E)$.
Per $a = 0$ la tesi è banalmente vera. Se $a > 0$, $\operatorname{osc}(af, I) = a \operatorname{osc}(f, I)$ e dunque se $\varepsilon > 0$ e $f$ soddisfa (8.15) con $\varepsilon/a$ al posto di $\varepsilon$ si ha che $af$ soddisfa il 2° criterio di integrabilità.
Poiché $\operatorname{osc}(-f, I) = \operatorname{osc}(f, I)$ dall'integrabilità di $f$ segue immediatamente l'integrabilità di $-f$. Dunque se $f \in \mathcal{R}(E)$, si ha che $af \in \mathcal{R}(E)$.
L'integrabilità di $f + g$ segue immediatamente dal 2° criterio di integrabilità e dal fatto che $\operatorname{osc}(f + g, I) \le \operatorname{osc}(f, I) + \operatorname{osc}(g, I)$.
L'uguaglianza tra gli integrali in (i) segue facilmente dall'Osservazione 8.9 poiché se $\{\xi_j\}$ è una scelta di punti relativi ad una partizione $\mathrm{P} = \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ (ossia $\xi_j \in I_j$), si ha ovviamente:

$$\sum_{j=1}^n \big(af(\xi_j) + bg(\xi_j)\big)|I_j| = a\sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j| + b\sum_{j=1}^n g(\xi_j)|I_j| \ .$$

(ii) Dimostriamo l'integrabilità di $f_+$. Dato $\varepsilon > 0$, sia P come in (8.15). La famiglia di intervalli P è unione disgiunta delle seguenti tre famiglie di intervalli (che possono anche essere vuote):

$$\mathrm{P}_+ := \{I \in \mathrm{P} \big| \inf_I f \ge 0\}, \ \mathrm{P}_- := \{I \in \mathrm{P} \big| \sup_I f \le 0\}, \ \mathrm{P}_0 := \{I \in \mathrm{P} \big| \sup_I f > 0 > \inf_I f\}.$$

Sugli intervalli di $\mathrm{P}_+$, $f = f_+$; sugli intervalli di $\mathrm{P}_-$, $f_+ = 0$ e sugli intervalli di $\mathrm{P}_0$ si ha che $\sup_I f = \sup_I f_+$ e $\inf_I f_+ = 0 < -\inf_I f$ e quindi, su tali intervalli, $\operatorname{osc}(f_+, I) \le \operatorname{osc}(f, I)$.
Ne segue che

$$\begin{aligned}
\sum_{I \in \mathrm{P}} \operatorname{osc}(f_+, I)|I| &= \sum_{I \in \mathrm{P}_+} \operatorname{osc}(f_+, I)|I| + \sum_{I \in \mathrm{P}_0} \operatorname{osc}(f_+, I)|I| \\
&= \sum_{I \in \mathrm{P}_+} \operatorname{osc}(f, I)|I| + \sum_{I \in \mathrm{P}_0} \operatorname{osc}(f_+, I)|I| \\
&\le \sum_{I \in \mathrm{P}_+} \operatorname{osc}(f, I)|I| + \sum_{I \in \mathrm{P}_0} \operatorname{osc}(f, I)|I| \\
&\le \sum_{I \in \mathrm{P}} \operatorname{osc}(f, I)|I| < \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

quindi $f_+$ è integrabile.
$f_- = (-f)_+$ e quindi l'integrabilità di $f_-$ segue dal punto (i) e dall'integrabilità della parte

positiva.
$|f| = f_+ + f_-$ e quindi è integrabile per il punto (i) e per l'integrabilità di $f_\pm$.
L'integrabilità di $\max\{f,g\}$ segue osservando che $\max\{f,g\} = (f-g)_+ + g$. Segue poi l'integrabilità di $\min\{f,g\} = -\max\{-f,-g\}$.
Dimostriamo ora l'integrabilità di $f^2$. Sia $M = \sup_E |f|$, sia $\varepsilon > 0$ e sia P tale che

$$\sum_{I\in \mathrm{P}} \mathrm{osc}\,(f,I)|I| < \frac{\varepsilon}{2M} \ . \tag{8.18}$$

Osserviamo che, per ogni $x, y \in I$,

$$|f(x)^2 - f(y)^2| = |f(x)-f(y)||f(x)+f(y)| \le 2M|f(x)-f(y)| \le 2M\,\mathrm{osc}\,(f,I) \ ,$$

e dunque $\mathrm{osc}\,(f^2,I) \le 2M\,\mathrm{osc}\,(f,I)$ e quindi da (8.18) segue

$$\sum_{I\in \mathrm{P}} \mathrm{osc}\,(f^2,I)|I| \le 2M \sum_{I\in \mathrm{P}} \mathrm{osc}\,(f,I)|I| < \varepsilon \ .$$

L'integrabilità di $fg$ segue dunque da (i) e dall'identità $fg = \big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big)/2$.
(iii): Se $f$ è integrabile e positiva si ha che $\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ge 0$ per ogni $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$ e quindi

$$\int_E f = \inf_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}(E)} \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ge 0 \ .$$

Quindi se $g \ge f$ ossia $g - f \ge 0$ si ha

$$0 \le \int_E (g-f) \overset{\text{(i)}}{=} \int_E g \ - \ \int_E f \ .$$

(iv) segue da (iii) osservando che $-|f| \le f \le |f|$ e da (i).
(v) Se $I = E$ non c'è nulla da dimostrare. Assumiamo dunque $I \subsetneq E$ e sia $\mathrm{P}_0$ una qualunque partizione che contenga $I$ (in generale si può prendere una partizione di tre o due elementi[4]). Dato $\varepsilon > 0$ sia $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$ come in (8.12) e sia poi $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P} \wedge \mathrm{P}_0$: chiaramente $\mathrm{P}_1$ è unione disgiunta di intervalli $\mathrm{P}_2 := \{I'_j\}$ che formano una partizione di $I$ e di intervalli $\mathrm{P}_3 := \{I''_k\}$ contenuti in $E \backslash I$. Per cui

$$\begin{aligned}
\overline{S}_I(f,\mathrm{P}_2) - \underline{S}_I(f,\mathrm{P}_2) \quad &\le \quad \overline{S}_I(f,\mathrm{P}_2) - \underline{S}_I(f,\mathrm{P}_2) + \sum_k \big(\sup_{I''_k} f - \inf_{I''_k} f\big)|I''_k| \\
&= \quad \overline{S}_E(f,\mathrm{P}_1) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}_1) \\
&\overset{(8.4)}{\le} \quad \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) < \varepsilon \ ,
\end{aligned}$$

e quindi $f \in \mathcal{R}(I)$.
Dimostriamo ora la (8.17) per $n = 2$; il caso generale segue poi immediatamente per induzione su $n$. Sia quindi $E = I_1 \cup I_2$ con $I_1 \le I_2$ intervalli disgiunti e si noti che se

$$\mathrm{P}_1 \in \mathcal{P}(I_1) \ , \ \mathrm{P}_2 \in \mathcal{P}(I_2) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}_1 \cup \mathrm{P}_2 \in \mathcal{P}(E) \ . \tag{8.19}$$

Quindi

$$\begin{cases} \underline{S}_{I_1}(f,\mathrm{P}_1) + \underline{S}_{I_2}(f,\mathrm{P}_2) = \underline{S}_E(f,\mathrm{P}_1\cup\mathrm{P}_2) \le \displaystyle\int_E f \\[2ex] \displaystyle\int_E f \le \overline{S}_E(f,\mathrm{P}_1\cup\mathrm{P}_2) = \overline{S}_{I_1}(f,\mathrm{P}_1) + \overline{S}_{I_2}(f,\mathrm{P}_2) \end{cases} \tag{8.20}$$

[4] Ad esempio, se $E = [0,1)$ e $I = (\frac13, \frac23)$, possiamo prendere $\mathrm{P}_0 = \big\{[0,\frac13], (\frac13,\frac23), [\frac23, 1)\big\}$.

Prendendo l'estremo superiore nella prima riga su $\mathrm{P}_1 \in \mathcal{P}(I_1)$ e $\mathrm{P}_2 \in \mathcal{P}(I_2)$ si ottiene

$$\underline{\int_{I_1}} f + \underline{\int_{I_2}} f \le \underline{\int_E} f$$

e prendendo l'estremo inferiore nella seconda riga su $\mathrm{P}_1 \in \mathcal{P}(I_1)$ e $\mathrm{P}_2 \in \mathcal{P}(I_2)$ si ottiene

$$\overline{\int_E} f \le \overline{\int_{I_1}} f + \overline{\int_{I_2}} f \ . \quad \blacksquare$$

**Proposizione 8.12 (3° Criterio di integrabilità)** $f \in \mathcal{R}(E)$ *se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esistono due funzioni semplici* $f^-, f^+ \in \mathcal{S}(E)$ *tali che*[5]

$$f^- \le f \le f^+ \quad (\text{su } E) \quad \text{e} \quad \int_E (f^+ - f^-) < \varepsilon \ , \qquad \big(f^\pm \in \mathcal{S}(E)\big) \tag{8.21}$$

**Dimostrazione** Data una partizione $\mathrm{P} = \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ definiamo le seguenti funzioni in $\mathcal{S}(E)$:

$$f_{\mathrm{P}}^- := \sum_{j=1}^n (\inf_{I_j} f)\ \chi_{I_j} \ , \qquad f_{\mathrm{P}}^+ := \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f)\ \chi_{I_j} \ . \tag{8.22}$$

Chiaramente,

$$f_{\mathrm{P}}^-(x) \le f(x) \le f_{\mathrm{P}}^+(x) \ , \ \forall x \in E \ , \quad \int_E (f_{\mathrm{P}}^+ - f_{\mathrm{P}}^-) = \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) \ . \tag{8.23}$$

Quindi se $f$ è integrabile, da (8.12) segue (8.21) con $f^- = f_{\mathrm{P}}^-$ e $f^+ = f_{\mathrm{P}}^+$.
Viceversa, assumiamo (8.21) con

$$f^\pm = \sum_{j=1}^{n_\pm} \alpha_j^\pm \chi_{I_j^\pm} \in \mathcal{S}(E) \ ,$$

e siano $\mathrm{P}^\pm$ due partizioni di $E$ che contengano, rispettivamente, gli intervalli $\{I_j^\pm\}$; sia, infine $\mathrm{P} = \mathrm{P}^+ \wedge \mathrm{P}^-$. Poiché ogni intervallo $I \in \mathrm{P}$ appartiene anche a $\mathrm{P}^\pm$, se $f_{\mathrm{P}}^\pm$ sono come in (8.22), si ha

$$\inf_I f^- \le \inf_I f_{\mathrm{P}}^- \le \sup_I f_{\mathrm{P}}^+ \le \sup_I f^+ \ . \tag{8.24}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\sum_{I\in\mathrm{P}} \operatorname{osc}(f,I)|I| &\overset{(8.23)}{=} \int_E (f_{\mathrm{P}}^+ - f_{\mathrm{P}}^-) \overset{(8.17)}{=} \sum_{I\in\mathrm{P}} \int_{I_j} (f_{\mathrm{P}}^+ - f_{\mathrm{P}}^-) \overset{(8.24)}{\le} \sum_{I\in\mathrm{P}} \int_{I_j} (f^+ - f^-) \\ &\overset{(8.17)}{=} \int_E (f^+ - f^-) \overset{(8.21)}{<} \varepsilon \ ,\end{aligned}$$

il che implica, per il 2° criterio, che $f$ è integrabile su $E$. $\blacksquare$

[5] Non confondere il simbolo $f^\pm$ qui usato per denotare funzioni semplici, con $f_\pm$ che denotano la parte positiva/negativa di $f$.

**Osservazione 8.13** (i) Se $f$ è integrabile su $[a, b]$ si ha che[6]

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,a]} f + \int_{(a,b)} f + \int_{[b,b]} f = \int_{(a,b)} f$$

e analogamente se $f$ è integrabile su $[a, b)$ o $(a, b]$: in altre parole *il valore dell'integrale di $f$ su $E$ non dipende dall'appartenenza o meno degli estremi ad $E$*. Questo permette di definire in modo non ambiguo per una funzione $f$ integrabile su un intervallo $E$ con estremi $a$ e $b$

$$\int_a^b f := \int_E f \quad \text{o equivalentemente} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_E f(x)dx \ . \tag{8.25}$$

Questa è la notazione classica.
(ii) Quindi se $E$ è un intervallo limitato di estremi $a < b$ e $f \in \mathcal{R}(E)$, si ha che

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f \ , \qquad \forall\ a < c < b \ . \tag{8.26}$$

È utile rimuovere il vincolo di ordine nella (8.26). A questo scopo poniamo la seguente

**Definizione 8.14** *Sia $E$ un intervallo limitato e $f \in \mathcal{R}(E)$ se $d > c$ sono punti in $\overline{E}$ poniamo*

$$\int_d^c f := -\int_c^d f \ , \qquad \forall\ d > c \ , \ (c, d \in \overline{E}) \ . \tag{8.27}$$

Da questa definizione segue facilmente che vale la (8.26) *a prescindere* dall'ordine di $a, b, c$:

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f \ , \qquad \forall\ a, b, c \in \overline{E} \ ; \tag{8.28}$$

ad esempio, se $c < a < b$

$$\int_a^c f + \int_c^b f := -\int_c^a f + \int_c^b f \overset{(8.26)}{=} -\int_c^a f + \int_c^a f + \int_a^b f = \int_a^b f \ .$$

Gli altri casi si trattano in modo analogo e vengono lasciati per esercizio.

**Esercizio 8.3** Verificare la (8.28) per tutte le relazioni tra $a$, $b$ e $c$.

**Esercizio 8.4** Dimostrare che: $f \in \mathcal{R}(E)$ *se e solo se esistono due successioni di funzioni semplici in* $\mathcal{S}(E)$, $\{f_n^-\}$ e $\{f_n^+\}$, *tali che*

$$f_n^- \le f_{n+1}^- \le f \le f_{n+1}^+ \le f_n^+ \ , \forall n \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_E (f_n^+ - f_n^-) = 0 \tag{8.29}$$

*ed in tal caso,*

$$\int_E f_n^- \nearrow \int_E f \swarrow \int_E f_n^+ \ . \tag{8.30}$$

**Suggerimento**: Se vale (8.29), l'integrabilità di $f$ segue immediatamente dal 3° criterio di integrabilità. Viceversa, se $f \in \mathcal{R}(E)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una partizione $\hat{\mathrm{P}}_n$ di $E$ tale $\overline{S}_E(f, \hat{\mathrm{P}}_n) - \underline{S}_E(f, \hat{\mathrm{P}}_n) < \frac{1}{n}$. Si definisca ricorsivamente, $\mathrm{P}_1 := \hat{\mathrm{P}}_1$ e per $n \ge 2$, $\mathrm{P}_n = \hat{\mathrm{P}}_n \wedge \mathrm{P}_{n-1}$. In tal modo $\mathrm{P}_1 \prec \mathrm{P}_2 \prec \cdots \prec \mathrm{P}_n \prec \cdots$, e $\hat{\mathrm{P}}_n \prec \mathrm{P}_n$. Quindi $\overline{S}_E(f, \mathrm{P}_n) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}_n) < \frac{1}{n}$ e la tesi segue con $f_n^- := f_{\mathrm{P}_n}^-$ e $f_n^+ := f_{\mathrm{P}_n}^+$.

[6] Si ricordi che $|[a, a]| = 0$.

## 1.4 Integrabilità delle funzioni continue

Una classe importante di funzioni integrabili sono le funzioni continue:

**Proposizione 8.15** (i) *Sia $E$ un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ limitata e continua. Allora $f \in \mathcal{R}(E)$ e*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \big| \quad \overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) < \varepsilon \quad \forall \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E) \text{ con } \operatorname{diam}(\mathrm{P}) \le \delta \ . \tag{8.31}$$

(ii) *Se $f$ è lipschitziana su $E$ con costante di Lipschitz*[7] *$L$, (8.31) vale con $\delta < \varepsilon/(L|E|)$.*

**Dimostrazione** (i) Se $E = [a, b]$ è chiuso (e quindi compatto) la dimostrazione di (8.31) è immediata: infatti per il Teorema di Heine–Cantor, $f$ è uniformemente continua su $E$ e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ per ogni $x, y \in E$, $|x - y| < \delta$, il che implica, per (8.14), che $(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Allora, se $\mathrm{P} = \{I_j\}$ è una qualunque partizione con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) < \delta$ si ha

$$\overline{S}_E(f, \mathrm{P}) - \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) \overset{(8.13)}{=} \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)|I_j| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ . \tag{8.32}$$

Consideriamo ora il caso in cui $E$ non sia chiuso. Sia $M := \sup_E f - \inf_E f = \operatorname{osc}(f, E)$; sia $a = \inf E$ e $b = \sup E$ e fissiamo

$$\delta_0 < \min\left\{\frac{b-a}{4}, \frac{\varepsilon}{6M}\right\} \ . \tag{8.33}$$

Si noti che $f$ è uniformemente continua su[8] $[a + \delta_0, b - \delta_0]$ e quindi esiste $\delta < \delta_0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \ , \qquad \forall\, x, y \in [a + \delta_0, b - \delta_0] \ , \ |x - y| < \delta \ , \tag{8.34}$$

il che implica

$$\operatorname{osc}(f, I) \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \ , \quad \forall\, I \subseteq [a + \delta_0, b - \delta_0] \ , \ |I| \le \delta \ . \tag{8.35}$$

Sia ora $\mathrm{P} = \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ una partizione (che possiamo assumere) ordinata con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) \le \delta$. Sia $k_1 \ge 2$ il primo indice per cui[9] $\inf I_{k_1} \ge a + \delta_0$ e $k_2 > k_1$ l'ultimo indice per cui $\sup I_{k_2} \le b - \delta_0$, cosicché $I_j \subseteq [a + \delta_0, b - \delta_0]$ per ogni $k_1 \le j \le k_2$ e

$$\bigcup_{j=1}^{k_1 - 1} I_j \subseteq [a, a + 2\delta_0] \ , \qquad \bigcup_{j=k_2+1}^{n} I_j \subseteq [b - 2\delta_0, b] \ , \qquad \bigcup_{j=k_1}^{k_2} I_j \subseteq [a + \delta_0, b + \delta_0] \ . \tag{8.36}$$

[7] Ossia, $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ per ogni $x, y \in E$.
[8] $b - \delta_0 > a + \delta_0$ essendo $\delta_0 < (b - a)/4 < (b - a)/2$ per (8.33).
[9] Essendo $\delta < \delta_0$, $\inf I_2 = \sup I_1 \le a + \delta < a + \delta_0$ e quindi $k_1 \ge 2$.

Allora, (ricordando (8.13) e (8.14) e che $M := \sup_E f - \inf_E f = \operatorname{osc}(f,E) \ge \operatorname{osc}(f,I_j)$ per ogni $j$) si ha che

$$\begin{aligned}
\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f,I_j)|I_j| \\
&= \sum_{j=1}^{k_1-1} \operatorname{osc}(f,I_j)|I_j| + \sum_{j=k_1}^{k_2} \operatorname{osc}(f,I_j)|I_j| + \sum_{j=k_2+1}^{n} \operatorname{osc}(f,I_j)|I_j| \\
&\le M \sum_{j=1}^{k_1-1} |I_j| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \sum_{j=k_1}^{k_2} |I_j| + M \sum_{j=k_2+1}^{n} |I_j| \\
&\overset{(8.36)}{\le} M 2\delta_0 + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + M2\delta_0 \overset{(8.33)}{<} \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

(ii) Se $f$ è lipschitziana su $E$ con costante di Lipschitz $L$, allora $\operatorname{osc}(f,I) \le L|I|$ per ogni intervallo $I \subseteq E$ e quindi, se P è una partizione di $E$ con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) \le \delta < \varepsilon/(L|E|)$ si ha

$$\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f,I_j)|I_j| \le \sum_{j=1}^{n} L\delta\ |I_j| < \frac{\varepsilon}{|E|} \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \varepsilon\ . \quad \blacksquare$$

Ad esempio, la funzione $\operatorname{sen}(1/x)$ è integrabile su $(0,b)$ per ogni $b>0$.

## 1.5 Integrabilità delle funzioni monotone

Un'altra classe notevole di funzioni integrabili è quella delle funzioni monotone.

**Lemma 8.16** *Sia $E$ un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ monotona e limitata. Allora:*

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f,I_j) \le \operatorname{osc}(f,E)\ , \qquad \forall\ \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)\ . \tag{8.37}$$

**Dimostrazione** Poiché[10] $\operatorname{osc}(-f,A) = \operatorname{osc}(f,A)$ possiamo assumere che $f$ sia monotona crescente. Osserviamo anche che il caso generale segue facilmente dal caso $n=2$ (per induzione). Quindi consideriamo solamente il caso $f$ crescente e $n=2$.
Se $x_1 \le x_2 \le y_1 \le y_2$ con $x_1, x_2 \in I_1$ e $y_1, y_2 \in I_2$, essendo $f(x_2) - f(y_1) \le 0$, si ha che

$$f(x_2) - f(x_1) + f(y_2) - f(y_1) \le f(y_2) - f(x_1) \le \operatorname{osc}(f,E) \tag{8.38}$$

e prendendo il sup su $x_1, x_2 \in I_1$ e $y_1, y_2 \in I_2$ si ottiene la tesi. $\blacksquare$

**Corollario 8.17** *Sia $E$ un intervallo limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ monotona e limitata. Allora $f \in \mathcal{R}(E)$ e, se $f$ è non costante*[11]*,*

$$\forall \varepsilon > 0\ , \forall \mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)\ \Big|\ \operatorname{diam}(\mathrm{P}) \le \delta < \frac{\varepsilon}{\operatorname{osc}(f,E)} \implies \overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) < \varepsilon\ . \tag{8.39}$$

**Dimostrazione** Sia $M := \operatorname{osc}(f,E) > 0$. Dal Lemma segue che se $\varepsilon > 0$ e $\mathrm{P} = \{I_j\} \in \mathcal{P}(E)$ con $\operatorname{diam}(\mathrm{P}) \le \delta < \varepsilon/M$ allora

$$\overline{S}_E(f,\mathrm{P}) - \underline{S}_E(f,\mathrm{P}) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f,I_j)|I_j| \le \frac{\varepsilon}{M} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{osc}(f,I_j) \le \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

[10] Cfr. Es. 8.2–(ii).
[11] $\operatorname{osc}(f,E) = 0$ se e solo se $f$ è costante e le funzioni costanti sono integrabili (Esempio 8.5).

## 2 Teorema fondamentale del calcolo

Il risultato più importante relativo al calcolo differenziale e integrale è senz'altro il seguente risultato, la cui dimostrazione è, a questo punto, straordinariamente semplice.

**Definizione 8.18** *Sia $E$ un intervallo, $x_0 \in E$ e $f \in \mathcal{R}(E)$. Chiamiamo* **funzione integrale di $f$ con punto base $x_0$** *la funzione definita come*

$$x \in E \mapsto F(x) = F(x; x_0) := \int_{x_0}^{x} f \ . \tag{8.40}$$

**Teorema 8.19 (Teorema fondamentale del calcolo – parte I)**
*Sia $E$ un intervallo, $x_0 \in E$ e $f \in \mathcal{R}(E)$ continua in $y \in E$. Allora, la funzione integrale $x \to F(x) := F(x; x_0)$ è derivabile in $y$ e si ha $F'(y) = f(y)$.*

**Dimostrazione** Calcoliamo il rapporto incrementale di $F$ in $y$: per ogni $h$ tale che $y + h \in E$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} &\overset{(8.40)}{=} \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{x_0+h} f \ - \ \int_{x_0}^{y} f\Big) \overset{(8.27)}{=} \frac{1}{h}\Big(\int_{x_0}^{x_0+h} f \ + \ \int_{y}^{x_0} f\Big) \\ &\overset{(8.28)}{=} \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} f = f(y) + \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} \big(f - f(y)\big) \\ &= f(y) + \alpha(h) \ , \qquad \text{con} \quad \alpha(h) := \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} \big(f - f(y)\big) \ . \end{aligned}$$

La tesi è dunque equivalente a mostrare che $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$ e questo segue dalla continuità di $f$ in $y$ (ipotesi che ancora non abbiamo usato). Sia $\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $x \in E$ con $0 < |x - y| < \delta$, sia $0 < |h| < \delta$ (con $y + h \in E$) e sia $I_h \subseteq E$ l'intervallo aperto di estremi $y$ e $y + h$. Se $x \in I_h$, si ha $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dunque:

$$|\alpha(h)| = \frac{1}{|h|}\Big|\int_{I_h} \big(f - f(y)\big)\Big| \le \frac{1}{|h|}\int_{I_h} \big|f - f(y)\big| \le \frac{1}{|h|}\int_{I_h} \varepsilon = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

**Definizione 8.20** *Se $g : A \to \mathbb{R}$ e $a, b \in A$ denotiamo $[g]_a^b := g(b) - g(a)$ l'***incremento di $g$ tra $a$ e $b$**.

**Corollario 8.21 (Teorema fondamentale del calcolo – parte II)**
*Sia $f$ una funzione continua su un intervallo $E$.*
(i) *Per ogni $x_0 \in E$ la funzione integrale $F$ in (8.40) è una primitiva di $f$ su $E$.*
(ii) *Se $G : E \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $f$ su $E$ e $F$ è la funzione integrale in (8.40) allora*

$$G(x) = G(x_0) + F(x; x_0) \ , \qquad \forall x \in E \ , \tag{8.41}$$

*e, per ogni $a, b \in E$, si ha*

$$\int_a^b f = G(b) - G(a) = [G]_a^b \ . \tag{8.42}$$

(iii) *Se $g \in C^1(E)$, allora, per ogni $a, b \in E$, si ha*

$$\int_a^b g' = g(b) - g(a) = [g]_a^b \ . \tag{8.43}$$

**Dimostrazione** (i) è conseguenza immediata della Proposizione 8.15 e del Teorema 8.19.
(ii): Poiché $G$ e $F$ sono due primitive di $f$ si ha che $G = F + c$ per una costante $c$; ma $F(x_0, x_0) = 0$ e quindi $G(x_0) = c$ e (8.41) segue. Infine, poiché $F$ e $G$ differiscono per una costante, si ha $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$ e dunque

$$G(b) - G(a) = F(b, x_0) - F(a, x_0) = \int_{x_0}^{b} f - \int_{x_0}^{a} = \int_{x_0}^{b} f + \int_{a}^{x_0} = \int_{a}^{b} f \ .$$

(iii) segue immediatamente da (8.42) con $f = g'$ e $G = g$ (essendo, ovviamente, $g$ una primitiva di $g'$). Si noti che, poiché $a, b \in E$, $g'$ è continua sull'intervallo chiuso $I$ di estremi $a$ e $b$ (e quindi integrabile su $I$). ∎

**Osservazione 8.22** (i) Il Corollario 8.21 mostra (come preannunciato nel Cap. 7, Osservazione 7.33–(iv)) che una funzione continua su un intervallo ha sempre una primitiva.
(ii) La formula (8.42) permette dunque di calcolare l'integrale di Riemann per tutte le funzioni di cui si sanno calcolare le primitive: questa è naturalmente l'applicazione più importante del calcolo delle primitive sviluppato nel Cap. 7.
(iii) Usando la notazione del § 5–Cap 7 e denotando con $\int f$ una[12] primitiva di $f$, si ha che

$$\int_a^b f = \Big[ \int f \Big]_a^b \ , \quad \text{o anche :} \quad \int_a^b f(x)dx = \Big[ \int f(x)dx \Big]_a^b \ , \tag{8.44}$$

formule che giustificano il nome "integrale indefinito" per la primitiva $\int f$ e di "integrale definito" per l'integrale di Riemann $\int_a^b f$.
(iv) Si noti che nei risultati di questo paragrafo, l'intervallo $E$ non è necessariamente limitato.

**Esercizio 8.5** Si dimostri il seguente "teorema della media integrale":
*Sia $f$ continua sull'intervallo $E$, siano $a, b \in E$, $a \neq b$, e sia $I$ l'intervallo aperto di estremi $a$ e $b$. Allora,*

$$\exists\ x \in I \ \Big|\ f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \ . \tag{8.45}$$

**Suggerimento**: poiché $\frac{1}{b-a}\int_a^b f = \frac{1}{a-b}\int_b^a f$ si può assumere che $a < b$. In tal caso si ha $(\inf_I f)(b-a) \le \int_b^a f \le (\sup_I f)(b-a)$. Si usi ora il teorema del valor medio per funzioni continue osservando che $\frac{1}{b-a}\int_a^b f \in \big[\inf_I f, \sup_I f\big]$.

## 2.1 Integrazione per parti

**Corollario 8.23 (Integrazione per parti)** *Siano $f, g \in C^1(E)$ con $E$ intervallo e siano $a, b \in E$. Allora,*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg' \ . \tag{8.46}$$

[12] Si ricordi l'Osservazione 7.38.

**Dimostrazione** Dal Teorema fondamentale del calcolo e dalla regola di derivazione del prodotto segue che

$$[fg]_a^b \overset{(8.43)}{=} \int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g \ + \int_a^b fg' \ . \qquad \blacksquare$$

**Osservazione 8.24** Naturalmente, il Corollario 8.23 si può dedurre dalla formula analoga per le primitive (Proposizione 7.36).

## 2.2 Cambio di variabile nell'integrazione

**Corollario 8.25 (Cambio di variabile)** *Siano $E, I$ intervalli, $f \in C(E)$, $\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi(I) \subseteq E$. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in I$, si ha*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi \ \cdot \varphi' \ , \qquad a = \varphi(\alpha), \ b = \varphi(\beta) \ . \tag{8.47}$$

**Dimostrazione** Si fissi $x_0 \in E$ e sia $F(x) = F(x; x_0)$ la funzione integrale(8.40) di $f$ con punto base $x_0$. Allora, dal Teorema fondamentale del calcolo e dalla regola della catena segue che

$$\int_\alpha^\beta f \circ \varphi \ \cdot \varphi' = \int_\alpha^\beta F' \circ \varphi \ \cdot \varphi' = \int_\alpha^\beta (F \circ \varphi)' \overset{(8.43)}{=} [F \circ \varphi]_\alpha^\beta = [F]_a^b \overset{(8.42)}{=} \int_a^b f \ . \qquad \blacksquare$$

**Osservazione 8.26** (i) Se riscriviamo la formula (8.47) nella notazione classica e denotiamo la funzione $t \in I \mapsto \varphi(t) = x(t) \in E$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(x(t)\big)x'(t)dt \ , \qquad a = \varphi(\alpha), \ b = \varphi(\beta) \ , \tag{8.48}$$

dunque: nel "cambio di variabile" $x = x(t)$, si calcola la funzione $f$ nella nuova variabile, gli estremi $\alpha$ e $\beta$ sono due punti che "corrispondono" a $a$ e $b$, rispettivamente, e il "$dx$" va sostituito con $x'(t)dt = \frac{dx}{dt} \ dt$ che suggerisce l'identità formale

$$dx = x'(t)dt = \frac{dx}{dt} \ dt \ . \tag{8.49}$$

(ii) Sebbene abbiamo chiamato il Corollario 8.25 "cambio di variabile", non abbiamo assunto che la funzione $\varphi$ sia biunivoca o iniettiva e può, ad esempio capitare che ci siano più punti $\alpha$, $\alpha'$,... diversi tar loro tali che $a = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha') = ...$, mentre, se $\varphi$ è invertibile allora esisteranno due soli punti $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ e $\beta = \varphi^{-1}(b)$ per cui vale la (8.47).
(iii) Anche per il Corollario 8.25 vale la stessa osservazione fatta per l'integrazione per parti: ossia esso può essere dedotto dalla formula analoga per le primitive (Proposizione 7.37).

**Esempio 8.27** Dimostriamo che

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \ dx = \frac{\pi}{2} \ . \tag{8.50}$$

Infatti, (in corrispondenza di alcune uguaglianze ci sono delle note esplicative):

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx &\overset{(8.28)}{=} \int_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}dx+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\\
&\overset{(a)}{=} -\int_{1}^{0}\sqrt{1-t^2}dt+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\\
&\overset{(8.14)}{=} \int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}dt+\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\\
&\overset{(b)}{=} 2\int_0^{\pi/2}|\cos t|\cos t\ dt \overset{(c)}{=} 2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt\\
&= \int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx=\int_0^{\pi/2}dx+\int_0^{\pi/2}\cos 2x\ dx\\
&\overset{(d)}{=} \frac{\pi}{2}+\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\ .
\end{aligned}
$$

(a): cambio di variabile $x=-t$ nel primo integrale.
(b): cambio di variabile $x=\operatorname{sen} t$.
(c): tra 0 e $\pi/2$, $\cos t\geq 0$.
(d): una primitiva di $\cos 2x$ è $\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$ e poi usiamo il Teorema fondamentale del calcolo (8.42).

**Osservazione 8.28 (Simmetrie nell'integrazione)** In matematica, così come in fisica, le simmetrie sono di fondamentale importanza e questo si riflette anche nell'integrazione semplificando, a volte, i calcoli. Vediamone due esempi:

- Se $f\in\mathcal{R}\big((-a,a)\big)$, $a>0$, è una funzione pari si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx\ ,\qquad \big(f(-x)=f(x)\big)\ . \tag{8.51}$$

Infatti

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx\ +\int_0^a f(x)\,dx=-\int_a^0 f(t)\,dt+\int_0^a f(x)\\
&= \int_0^a f(t)\,dt+\int_0^a f(x)\\
&= 2\int_0^a f\ .
\end{aligned}
$$

Con un calcolo del tutto analogo si vede invece che se $f\in\mathcal{R}\big((-a,a)\big)$, $a>0$, è una funzione dispari, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0\ ,\qquad \big(f(-x)=-f(x)\big)\ . \tag{8.52}$$

- Se $f\in\mathcal{R}\big((-a,a)\big)$ per ogni $a>0$ ed è periodica di periodo $T>0$, allora

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx\ ,\qquad \big(f(x+T)=f(x)\big)\ . \tag{8.53}$$

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)\,dx &\overset{(8.28)}{=} \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^{a+T} f(x)\,dx \\ &\overset{(a)}{=} \int_{a+T}^T f(t-T)\,dt + \int_0^{a+T} f(x)\,dx \\ &\overset{(b)}{=} \int_{a+T}^T f(t)\,dt + \int_0^{a+T} f(x)\,dx \\ &\overset{(8.28)}{=} \int_0^T f(t)\,dt\end{aligned}$$

(a): cambio di variabile $x = t - T$ nel primo integrale.
(b): essendo $f$ periodica di periodo $T$, si ha anche $f(t + mT) = f(t)$ per ogni $t$ e per ogni $m \in \mathbb{Z}$ (qui $m = -1$).

## 3 Aree

Abbiamo visto (Esempio 8.5–(i)) che l'integrale della funzione costante $f(x) \equiv h > 0$ tra $a$ e $b$ ($a < b$) è $(b - a)h$ che per la geometria euclidea è l'area del rettangolo di base $(b - a)$ e altezza $h$. Allo stesso modo (Osservazione 8.6), possiamo interpretare (se $f \geq 0$) i numeri $\underline{S}_E(f, \mathrm{P})$ e $\overline{S}_E(f, \mathrm{P})$ come "aree" di unioni di "multi–rettangoli" $R_1$ e $R_2$:

$$R_1 \subseteq \{(x, y) \big| \, x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq R_2 \ ,$$

dove $R_1$ è l'unione dei rettangoli di base $I_j \in \mathrm{P}$ e altezza $\inf_{I_j} f$ e $R_2$ è l'unione dei rettangoli di base $I_j \in \mathrm{P}$ e altezza $\sup_{I_j} f$. *Questa idea, in effetti, è alla base di una definizione rigorosa di area per domini "normali":*

**Definizione 8.29** (i) *Siano $g \leq f$ due funzioni integrabili sull'intervallo limitato $E$. Chiamiamo* **dominio normale (di base $E$ tra $g$ e $f$)** *la seguente regione di $\mathbb{R}^2$*

$$D_{g,f} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, x \in E \ , \ g(x) \leq y \leq f(x)\} \ , \tag{8.54}$$

*e definiamo la sua* **area** *come*

$$\mathrm{area}\,(D_{g,f}) := \int_E (f - g) \ . \tag{8.55}$$

*Nel caso $g = 0$ poniamo $D_f := D_{0,f}$.*
(ii) *Se un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato è unione disgiunta di un numero finito di domini normali $D_i$, $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$, poniamo*

$$\mathrm{area}\,(D) := \sum_{j=1}^{n} \mathrm{area}\,(D_j) \ . \tag{8.56}$$

**Osservazione 8.30** (i) Secondo questa definizione, se $f \geq 0$, $\mathrm{P} \in \mathcal{P}(E)$, e $R_1$ e $R_2$ sono, rispettivamente, l'unione dei rettangoli di base $I_j \in \mathrm{P}$ e altezza $\inf_{I_j} f$ e l'unione dei rettangoli di base $I_j \in \mathrm{P}$ e altezza $\sup_{I_j} f$, abbiamo che

$$\mathrm{area}\,(R_1) = \underline{S}_E(f, \mathrm{P}) \leq \ \mathrm{area}\,(D_f) \leq \overline{S}_E(f, \mathrm{P}) = \ \mathrm{area}\,(R_2)$$

e raffinando le partizioni di $E$ si ha che l'area di $D_f$, ossia l'area "sottesa dal grafico di $f$", è l'elemento separatore delle aree dei multi-rettangoli contenuti in $D_f$ e delle aree dei multi-rettangoli che contengono $D_f$.

(ii) Non è difficile verificare che la formula (8.56) *non dipende* dal particolare modo in cui $D$ viene scomposto in unione disgiunta di domini normali (e che quindi la definizione è ben posta): vedi Esercizio 8.6 a fine paragrafo.

Non sorprenderà certo il seguente famoso risultato.

**Teorema 8.31 (Area del cerchio)** *Sia* $r > 0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *e*

$$C_r(x_0, y_0) := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le r\Big\} \ . \tag{8.57}$$

*Allora* $C_r(x_0, y_0)$ *è un dominio normale e* $\mathrm{area}\big(C_r(x_0, y_0)\big) = \pi r^2$.

Naturalmente, $C_r(x_0, y_0)$ è (per definizione) **il cerchio di centro** $(x_0, y_0)$ **e raggio** $r$.

**Dimostrazione** La disuguaglianza $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le r$ che definisce $C_r(x_0, y_0)$ è equivalente alla disuguaglianza $(y - y_0)^2 \le r^2 - (x - x_0)^2$, che, a sua volta, è equivalente alle disuguaglianze

$$\begin{cases} |y - y_0| \le \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \\ |x - x_0| \le r \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} g(x) := y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \le y \le f(x) := y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2} \\[2ex] x_0 - r \le x \le x_0 + r \ . \end{cases}$$

Ma tali relazioni significano che $C_r(x_0, y_0)$ è un dominio normale con base $E := [x_0 - r, x_0 + r]$ tra le funzioni (integrabili) $g$ ed $f$. Dunque, dalla definizione di area, e facendo nella quarta uguaglianza il cambio di variabile $x = x_0 + rt$, segue che

$$\begin{aligned} \mathrm{area}\big(C_r(x_0, y_0)\big) &:= \int_E (f - g) = 2\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}\ dx \\ &= 2r \int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \sqrt{1 - \Big(\frac{x - x_0}{r}\Big)^2}\ dx \\ &= 2r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\ dt \\ &\overset{(8.50)}{=} 2r^2\ \frac{\pi}{2} = \pi r^2 \ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Esercizio 8.6** (i) Dimostrare che se $D_1$ e $D_2$ sono due domini normali con $D_1 \cap D_2 \ne \emptyset$, allora $D_1 \cap D_2$ è un dominio normale.

(ii) Dimostrare che la definizione data in (ii) è ben posta, ossia che se $D = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$ è un'altra decomposizione di $D$ in domini normali a due a due disgiunti allora

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{area}\,(D_j) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{area}\,(D'_j) \ .$$

**Suggerimento**: Come fatto per le partizioni si considerino gli insieme $D_{ij} := D_i \cap D'_j$ (con $i$ e $j$ tali che $D_i \cap D'_j \ne \emptyset$).