Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM120

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 13 del 16 Maggio 2018
Argomento: Integrali

1. Calcolare i seguenti integrali:

   (a) $\int_{-1}^{1} e^{|x|}\mathrm{d}x$;
   Poiché $e^{|x|}$ è una funzione pari integrata su un intervallo simmetrico, l'integrale sarà il doppio di quello calcolato sulla metà destra dell'intervallo:

$$\int_{-1}^{1} e^{|x|}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} e^{|x|}\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} e^{x}\mathrm{d}x = 2[e^x]_0^1 = 2(e-1).$$

   (b) $\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}} \left(1+x^5\right)\sin\left(x^3\right)\mathrm{d}x$;
   Definendo $f(x) := \sin\left(x^3\right)$ e $g(x) := x^5\sin\left(x^5\right)$, f sarà una funzione dispari mentre g è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico; dunque l'integrale di f sarà nullo mentre quello di g sarà due volte l'integrale sulla parte destra dell'intervallo:

$$\begin{aligned}
\int_{-\sqrt[3]{\pi}}^{\sqrt[3]{\pi}} (f(x)+g(x))\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^5\sin\left(x^3\right) \\
&\underset{(y=x^3)}{=} \frac{2}{3}\int_0^{\pi} y\sin y\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{3}\left([-y\cos y]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos y\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\pi + [\sin y]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^3 x\mathrm{d}x$;
   Scrivendo $\cos^3 x = \cos^2 x\cos x = \left(1-\sin^2 x\right)\cos x$ abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^3 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 x - \sin^5 x\right)\cos x\mathrm{d}x \underset{(y=\sin x)}{=} \int_0^1 \left(y^3-y^5\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{y^4}{4}-\frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

   (d) $\int_1^e \log^2 x\mathrm{d}x$;
   Integrando due volte per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_1^e \log^2 x\mathrm{d}x &= \left[x\log^2 x\right]_1^e - \int_1^e 2\log x\mathrm{d}x \\
&= e - \left([2x\log x]_1^e - \int_1^e 2\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e-(2e-[2x]_1^e)\\
&= e-(2e-(2e-2))\\
&= e-2.
\end{aligned}
$$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{3+x}\mathrm{d}x;$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{3+x}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \frac{x}{3+x}\frac{dx}{2\sqrt{x}}\\
&\underset{(y=\sqrt{x})}{=} 2\int_0^1 \frac{y^2}{3+y^2}\mathrm{d}y\\
&= 2\int_0^1\left(1-\sqrt{3}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\right)\mathrm{d}y\\
&= 2\left[y-\sqrt{3}\arctan\frac{y}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\
&= 2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi
\end{aligned}
$$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x;$
Integrando per parti si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\arctan x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\arctan x}{x+1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\\
&= -\frac{\pi}{8}+\int_0^1\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\pi}{8}+\left[\frac{\arctan x}{2}+\frac{\log|x+1|}{2}-\frac{\log|x^2+1|}{4}\right]_0^1\\
&= -\frac{\pi}{8}+\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\log 2}{2}-\frac{\log 2}{4}\right)\\
&= \frac{\log 2}{4}.
\end{aligned}
$$

(g) $\displaystyle\int_0^{\log 2}\frac{\mathrm{d}x}{9e^{-x}-e^x};$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\log 2}\frac{\mathrm{d}x}{9e^{-x}-e^x} &= \int_0^{\log 2}\frac{e^x}{9-e^{2x}}\mathrm{d}x\\
&\underset{(y=e^x)}{=} \int_1^2\frac{1}{9-y^2}\mathrm{d}y\\
&= \int_1^2\left(\frac{1}{6}\frac{1}{3+y}+\frac{1}{6}\frac{1}{3-y}\right)\mathrm{d}y\\
&= \left[\frac{1}{6}\log|y+3|-\frac{1}{6}\log|y-3|\right]_1^2\\
&= \frac{1}{6}(\log 5-\log 4+\log 2)
\end{aligned}
$$

$$= \quad \frac{1}{6}\log\frac{5}{2}.$$

(h) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \\
&\underset{(x=\sin y)}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos y}\cos y\mathrm{d}y \\
&\underset{\left(z=\tan\frac{y}{2}\right)}{=} 2\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\frac{1-z^2}{1+z^2}\frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z \\
&= 2\int_0^1 \left(\frac{2}{1+z^2}-1\right)\mathrm{d}z \\
&= 2[2\arctan(z)-z]_0^1 \\
&= \pi - 2.
\end{aligned}$$

(i) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$;

Scrivendo $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&\underset{(y=\cos x)}{=} -\int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1-y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{\log|1+y|}{2} - \frac{\log|1-y|}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\log\frac{3}{2}}{2} - \frac{\log\frac{1}{2}}{2} \\
&= \frac{\log 3}{2}.
\end{aligned}$$

2. Sia $f(x) = |\sin x|$ su $E = [0, 4\pi]$. Calcolare l'area dell'insieme normale

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in E,\, 0 \le y \le f(x)\right\}.$$

Essendo $\sin(x+\pi) = -\sin x$, la funzione f avrà periodo $T = \pi$, dunque l'area sarà data da

$$\int_0^{4\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{3}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi} \sin x = 4[-\cos x]_0^{\pi} = 8.$$

3. Calcolare l'area della regione di piano limitata compresa tra le parabole di equazione $y = -x^2 + 3x$ e $y = x^2 - x$.

Le due parabole si incontrano per x tale che $-x^2+3x = x^2-x$, cioè $x=0$ e $x=2$, dunque la regione limitata tra le due parabole si avrà per $x \in [0,2]$. Inoltre, per questi valori di x abbiamo $-x^2+3x \geq x^2-x$ e quindi possiamo scrivere la regione come

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2-x \leq y \leq -x^2+3x\right\}$$

e dunque

$$\operatorname{area}(D) = \int_0^2 \left(-x^2+3x-\left(x^2-x\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(4x-2x^2\right) \mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

4. Dimostrare che l'ellisse di semiassi $a, b > 0$

$$E_{a,b} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

è un insieme normale e che la sua area è pari a πab.

Innanzi tutto, si tratta di un insieme normale perché la condizione che definisce l'ellisse può essere riscritta come

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \iff \frac{y^2}{b^2} \leq 1-\frac{x^2}{a^2} \iff \begin{cases} |x| \leq a \\ |y| \leq b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \end{cases} \iff \begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} \end{cases}.$$

L'area sarà dunque data da:

$$\operatorname{area}(E_{a,b}) = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \underset{(t=\frac{x}{a})}{=} 2ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \pi ab.$$