Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Esercitazione di AM310

A.A. 2017 – 2018 - Esercitatore: Luca Battaglia

Soluzioni dell'esercitazione 2 del 19 Ottobre 2017
Argomento: Misure, passaggio al limite sotto integrale

1. Sia Σ la σ-algebra su $\mathbb{R}$ definita da

$$\Sigma := \{A \subset \mathbb{R} : [0,+\infty) \subset A \text{ oppure } A \subset (-\infty,0)\}$$

e sia μ la misura su Σ definita da $\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{se } A \cap [0,+\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty,0) \end{cases}$.
Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Σ-misurabile se e solo se è costante su $[0,+\infty)$.
Dimostrare che, se $f|_{[0,+\infty)} \equiv c$, allora $\int_A f \mathrm{d}\mu = \begin{cases} c & \text{se } A \cap [0,+\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty,0) \end{cases}$ per ogni $A \in \Sigma$.

Supponiamo che f valga costantemente c su $[0,+\infty)$ e prendiamo un aperto $A \subset \mathbb{R}$. Se $c \notin A$, allora $f^{-1}(A) \subset [0,+\infty)$ e dunque appartiene a Σ. Altrimenti, $f^{-1}(A) = [0,+\infty) \cup \left(f^{-1}(A) \cap (-\infty,0)\right)$ è un unione di due insiemi Σ-misurabili e dunque è anch'esso Σ-misurabile. In ogni caso, $f^{-1}(A) \in \Sigma$ e quindi f è Σ-misurabile.
Supponiamo invece che f non sia costante su $[0,+\infty)$, cioè che esistano due $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ con $f(x_1) \neq f(x_2)$. Prendiamo ora un aperto $A \subset \mathbb{R}$ contenente $f(x_1)$ ma non $f(x_2)$ e consideriamo $f^{-1}(A)$: sicuramente non conterrà tutta la semiretta $[0,+\infty)$, perché non contiene x_2, e inoltre non sarà contenuto in $(-\infty,0)$ perché contiene x_1; dunque, $f^{-1}(A) \notin \Sigma$ e dunque f non è Σ-misurabile.
Se $f|_{[0,+\infty)} \equiv c$, allora councide con la funzione costantemente uguale a c a meno di un insieme di misura nulla. Dunque, il suo integrale su $A \in \Sigma$ coinciderà con quello della costante c, che per definizione vale

$$\int_A f \mathrm{d}\mu \int_A c \mathrm{d}\mu = c\mu(A) = \begin{cases} c & \text{se } A \cap [0,+\infty) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } A \subset (-\infty,0) \end{cases}.$$

2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
Calcolare

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x$;

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)\cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right)\mathrm{d}x$;

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

   (a) $f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ per ogni $x \neq 0$, e inoltre $\left|f(x)e^{-nx^2}\right| \leq f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, dunque si può applicare il teorema di convergenza dominata:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f(x)e^{-nx^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} 0\mathrm{d}x = 0.$$

(b) Utilizzando il cambio di variabile $y = x + n$ e la periodicità del coseno si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)\cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n} - 2\pi\right)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right)\mathrm{d}y;$$

a questo punto, poiché $f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} f(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $\left|f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right)\right| \leq |f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$, allora si può applicare il teorema di convergenza dominata:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+n)\cos\left(\frac{2\pi x}{n}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f(y)\cos\left(\frac{2\pi y}{n}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\mathrm{d}y \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c) Dal cambio di variabile $y = \frac{x}{n}$ otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan\left(x^2\right)\mathrm{d}x = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\arctan\left(n^2y^2\right)\mathrm{d}y.$$

In quest'ultimo integrale si può applicare il teorema di convergenza dominata, perché $f(y)\arctan\left(n^2y^2\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}f(y)$ per ogni $y \neq 0$ e $\left|f(y)\arctan\left(n^2y^2\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}f(y) \in L^1(\mathbb{R})$; dunque,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)\arctan\left(x^2\right)\mathrm{d}x &= \left(\lim_{n\to+\infty} n\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\arctan\left(n^2y^2\right)\mathrm{d}y\right) \\ &= \left(\lim_{n\to+\infty} n\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f(y)\arctan\left(n^2y^2\right)\mathrm{d}y\right) \\ &= \left(\lim_{n\to+\infty} n\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{2}f(y)\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\lim_{n\to+\infty} n \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

3. Utilizzando la serie di funzioni definita da $f_n(x) = \frac{\log x}{x^{n+1}}$ per $n \geq 1$, dimostrare l'uguaglianza

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x^2 - x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Innanzitutto, poiché le f_n sono non negative allora si può applicare il teorema della convergenza monotona alla successione delle somme parziali $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ e scambiare serie e integrali: $\int_1^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$
Nel membro di sinistra, dalla somma della serie geometrica otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{\log x}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{\log x}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{\log x}{x}\frac{x-(x-1)}{x-1} = \frac{\log x}{x^2 - x}.$$

A destra invece, integrando per parti, si ottiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{n+1}} \mathrm{d}x = \left[-\frac{\log x}{nx^n}\right]_1^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{x^{n+1}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}.$$

Dunque otteniamo l'uguaglianza

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - x} \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

4. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ-misurabili tale che $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente e $\int_X |f_n| \mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
   Dimostrare che, se f_{n_k} è una sottosuccessione tale che $\int_X |f_{n_k}| \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{2^k}$, allora soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza dominata.
   Dimostrare, utilizzando la successione $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,n+1)}$, che l'intera successione potrebbe non soddisfare le ipotesi del teorema di convergenza dominata. Trovare un'estratta f_{n_k} che soddisfa le ipotesi.

   Se f_{n_k} verifica la proprietà precedente, allora si può prendere come maggiorante integrabile $f(x) := \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k}(x)|$. Innanzi tutto, f è ben definita su $x \in X$, a meno di un insieme di misura nulla, e appartiene a $L^1(X, \mu)$ perché

$$\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k}| \mathrm{d}\mu \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

   e inoltre maggiora tutte le f_{n_k} perché ovviamente $|f_{n_k}(x)| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{n_k}(x)|$ per ogni $x \in X$.
   Prendendo $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n,n+1)}$, l'integrale del limite coincide con il limite dell'integrale, perché $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente e $\int_1^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Tuttavia, la successione non soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza dominata (né di convergenza monotona): infatti, se avesse una maggiorante integrabile f, questa dovrebbe valere almeno $\frac{1}{n}$ su ogni intervallo del tipo $[n, n+1)$, e dunque

$$\int_1^{+\infty} f \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) \mathrm{d}x \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

   Poiché $\int_1^{+\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{n}$, un'estratta con maggiorante integrabile è ad esempio f_{2^k}.

5. Sia (X, Σ, μ) uno spazio misura con $\mu(X) < +\infty$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ-misurabili, non-negative, tali che $f_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente e che soddisfino la proprietà

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, M_\varepsilon \text{ tale che } \int_{\{x\in X:\, f_n(x) > M_\varepsilon\}} f_n \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon.$$

   Dimostrare, utilizzando la successione $f_n^M(x) = \min\{f_n(x), M\}$, che $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Ad ogni $M > 0$ fissato, $f_n^M \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ puntualmente, inoltre per costruzione $0 \leq f_n^M \leq M$, con $\displaystyle\int_X M\mathrm{d}\mu = M\mu(X) < +\infty$, dunque dal teorema di convergenza dominata $\displaystyle\int_X f_n^M \mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Prendiamo ora $\varepsilon, M_\varepsilon$ che verifichino la proprietà precedente e notiamo che $f_n = f_n^M + (f_n - M)\chi_{\{x\in X: f_n(x)\geq M\}}$: dunque, otteniamo

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n^M \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to+\infty} \int_{\{x\in X: f_n(x)\geq M\}} (f_n - M)\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\{x\in X: f_n(x)\geq M\}} (f_n - M)\mathrm{d}\mu \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\{x\in X: f_n(x)\geq M\}} f_n \mathrm{d}\mu \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Essendo ε arbitrario, concludiamo che il limite è 0.